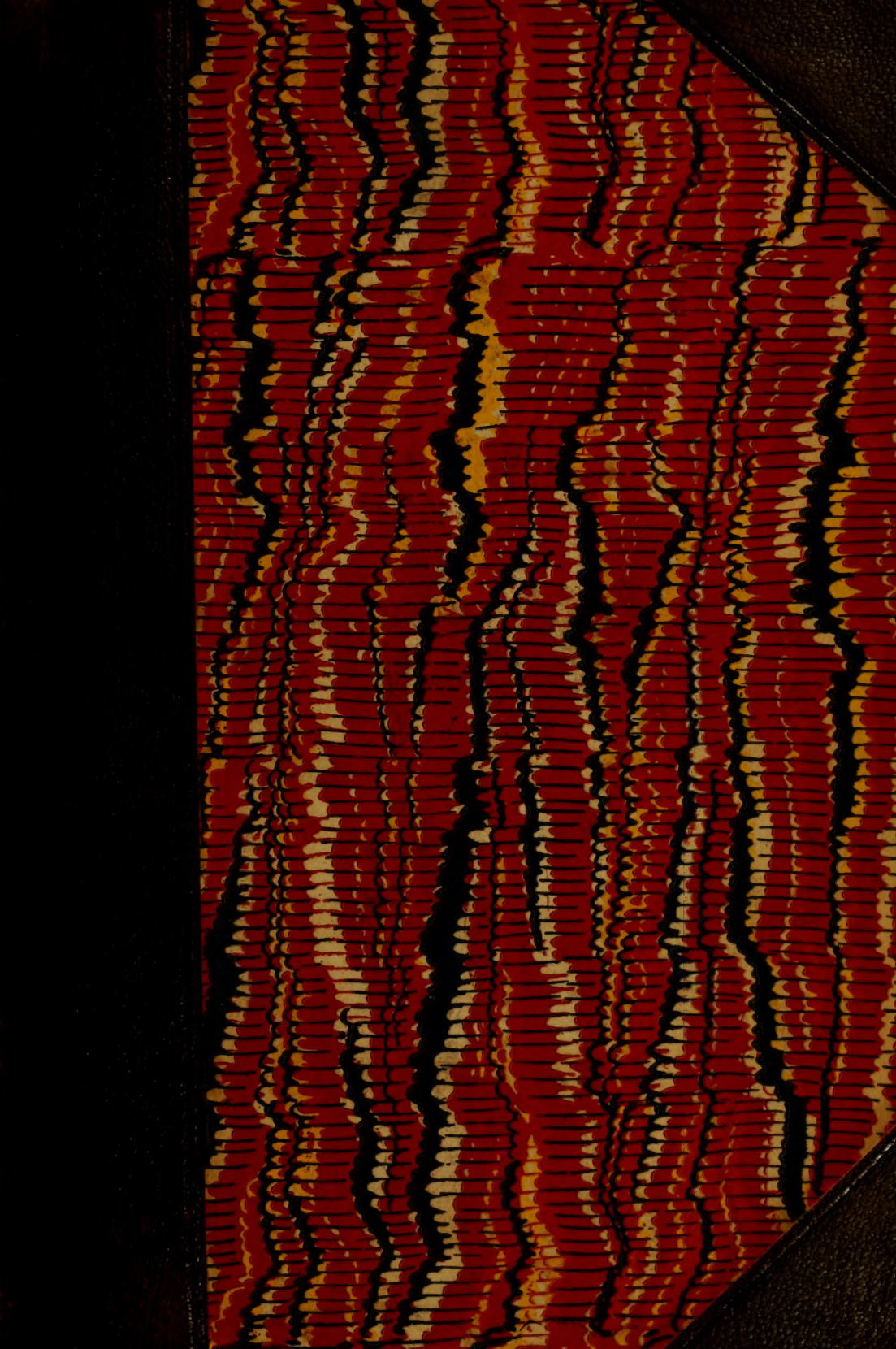
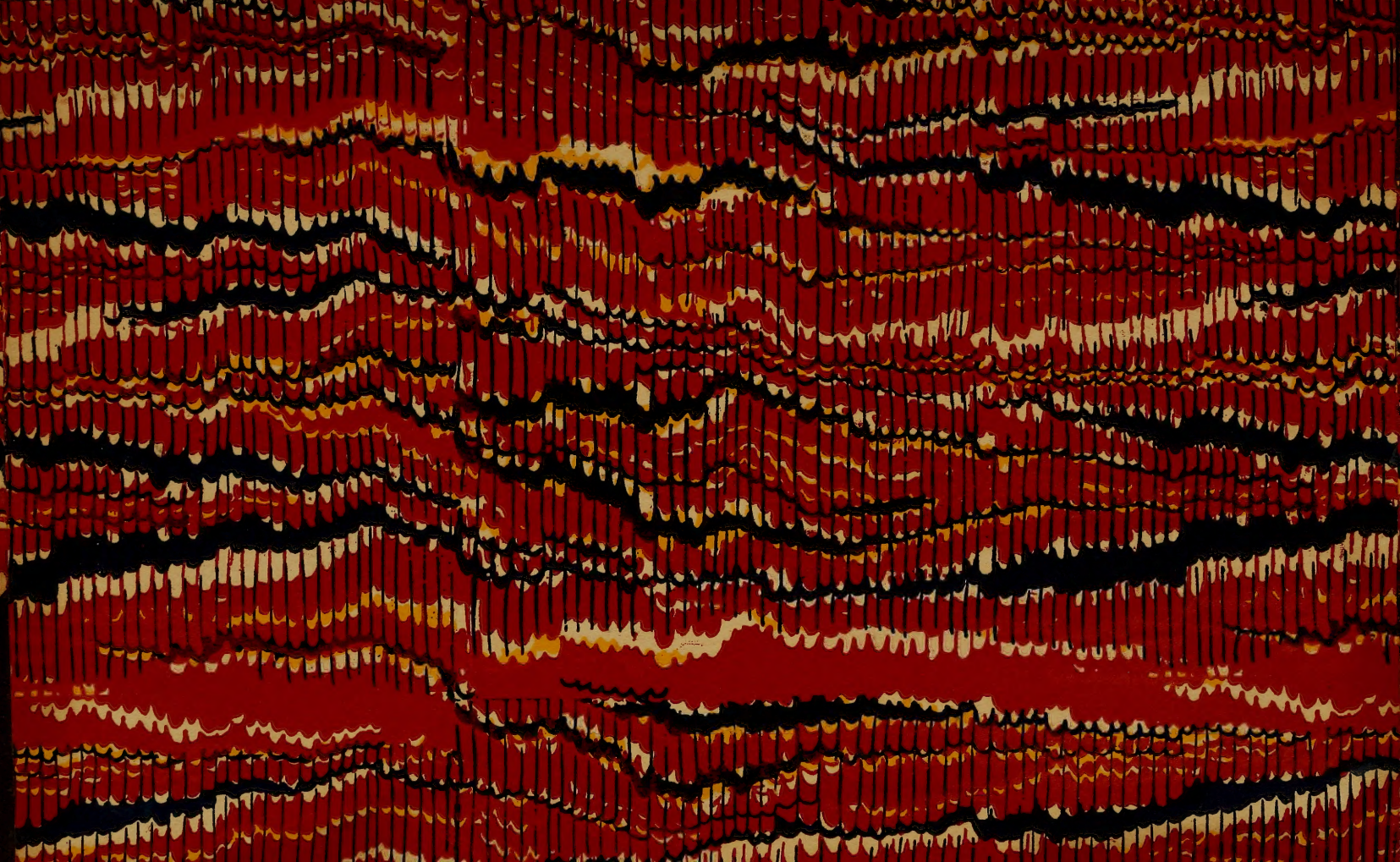




Pat. 4 7 78996 Smith 24

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK,
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDZWANZIGSTER BAND.

1905.

MIT 29 FIGUREN IM TEXT.

CANCELLED
BUREAU OF AMERICAN ETHNOLOGY
1906
LIBRARY.

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUL 16 1926
NATIONAL MUSEUM

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]

LIBRARY OF CONGRESS
FEB 24 1914
COPYRIGHT DEPOSIT.

Niels Henrik Abel,

Œuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. 2 tomes. 4. 1881. geh. *M.* 24.—

Tome premier [VIII u. 621 S.], contenant les mémoires publiés par Abel.
Tome second [IV u. 341 S.], contenant les mémoires posthumes d'Abel.

Carl Friedrich Gauß,

Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 10 Bände. gr. 4. kart.

Bisher erschienen:

Band I: Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdr. 1870. *M.* 20.—
„ II: Höhere Arithmetik. 2. Abdruck 1876. *M.* 20.—
„ III: Analysis. 2. Abdruck 1876. *M.* 20.—
„ IV: Wahrscheinlichkeits-Rechnung und Geometrie. 2. Abdr. 1880. *M.* 25.—
„ V: Mathem. Physik. 2. Abdr. 1877. *M.* 25.—
Band VI: Astron. Abhandlungen. 2. Abdruck. 1874. *M.* 33.—
„ VIII: Nachträge zur Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeits-Rechnung und Geometrie. 1900. *M.* 24.—
„ IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. 1903. *M.* 26.—

Nachtrag zum ersten Abdruck des zweiten Bandes 1876 kart. *M.* 2.—

Band VII u. X befinden sich in Vorbereitung.

Hermann Graßmann,

gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. gr. 8. geh.

I. Band. I. Teil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Mit einem Bilde Graßmanns in Holzschnitt u. 35 Figuren im Text. [XV u. 435 S.] 1894. *M.* 12.—
I. — II. — Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 511 S.] 1896. *M.* 16.—
II. — I. — Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren im Text. [X u. 452 S.] 1904. *M.* 16.—
II. — II. — Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. [VIII u. 266 S.] 1902. *M.* 14.—

[Fortsetzung unter der Presse.]

Leopold Kronecker,

Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften von Kurt Hensel. In 4 Bdn. gr. 4. geh.

I. Band, mit dem Bildnisse Kroneckers. [IX u. 484 S.] 1895. *M.* 28.—
II. — [VIII u. 541 S.] 1897. *M.* 36.—
III. — 1. Halbband. [VIII u. 473 S.] 1899. *M.* 36.—

[Fortsetzung unter der Presse.]

Franz Neumann,

gesammelte Werke. Herausg. von seinen Schülern. 3 Bände. gr. 4. geh.

II. Band. Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. *M.* 36.—

[Band I und II in Vorbereitung.]

Bernhard Riemann,

gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Herausgegeben von Heinrich Weber. 2. Auflage bearbeitet von H. Weber. Mit einem Bildnis Riemanns. [X u. 558 S.] gr. 8. 1892. geh. *M.* 18.—

AVIS.

Die ausstehenden zwei Bände (XXI und XXII) werden Ende 1906 erscheinen.

DIE REDAKTION.

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHAK UND FRANZ SCHAFARZIK.

MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDZWANZIGSTER BAND.

1905.

MIT 29 FIGUREN IM TEXT.

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUL 16 1926
277762
NATIONAL MUSEUM

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

INHALT DES XXIII. BANDES.

Abhandlungen.

Seite

1. Virgil Klatt und P. Lenard, Über die Erdalkaliphosphore 1
2. Stefan Bugarszky, Eine neue Methode zur quantitativen Bestimmung des Äthylalkohols 35
3. R. v. Kövesligethy, Die Berechnung seismischer Elemente 42
4. Andreas Högyes, Bericht über die Tätigkeit des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1903 78
5. Leopold Klug, Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von gewissen Gebilden konstant sind 82
6. Alexander Gorka, Über die physiologische Funktion der Speicheldrüsen der Weinbergschnecke (Helix pomatia L.) 156
7. Aladár Visnya, Über ein Kriterium der Intransivität von endlichen Gruppen linearer Substitutionen 178
8. Aladár Visnya, Über die Gesamtheit der Hermiteschen Invarianten einer endlichen Gruppe linearer Substitutionen 188
9. Gyozo Zemplén, Bestimmung des Koeffizienten der innern Reibung der Gase nach einer neuen experimentellen Methode 202
10. Franz Schafarzik, Daten zur genaueren Kenntnis des Szepes-Gömörer Erzgebirges 225
11. Josef Árkövy, Die Bedeutung des Diverticulum Tomes-Zsigmondyi, des Cingulum an den oberen lateralen Schneidezähnen und des Foramen coecum molarium (Milleri) in phylogenetischer Beziehung 264
12. G. Melczer, Über den Aragonit von Urvölgy 272
13. Anton Koch, Die fossilen Fische des Beocsiner-Zementmergels . . 274
14. Irenäus Károly, Über den Durchgang von Hertzschen Wellen durch Elektrolyte 276

Sitzungsberichte.

I. Der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Klasse der ungarischen Akademie 291

II. Der Fachsektionen der Königl. Ungar. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft 293

A) Fachsektion für Zoologie 293

B) Fachsektion für Botanik 300

Seite

C) Fachsektion für Chemie und Mineralogie 307
D) Fachsektion für Physiologie 314
E) Konferenz der vereinigten Sektionen 325
F) Populäre Abendvorlesungen 325
G) Populäre Kurse 325

Bericht über die Tätigkeit, den Vermögenstand u. a. der ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ung. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft.

I. Ungarische Akademie der Wissenschaften 326
II. Kgl. Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft . . 330

Bericht über den Bolyai-Preis.

Erstattet von Gustav Rados 332

Bücherschau.

Karl von Than. A kisérleti chemia elemei (Die Elemente der Experimentalchemie) 353

NAMENREGISTER.*

Aigner, L., Neue Formen der ungarischen Lepidopteren-Fauna 299.*

Alexander, B., Die Untersuchung der Knochen in der Hand mittels X-Strahlen 292.*

Arkövy, J., Die Bedeutung des Diverticulum Tomes-Zsigmondyi, des Cingulum an den oberen lateralen Schneidezähnen and des Foramen coecum molarium (Milleri) in phylogenetischer Beziehung 264.*

Augustin, B., Beiträge zur Kenntnis der Entwicklung und der vergleichenden Anatomie der Paprikafrucht 302*. — Untersuchungen über die ungarische Seifenwurz 304.*

Bálint, R., Die Störung der Aufmerksamkeit bei Affektionen der Hemisphären 316.*

Balkányi, K., M. Fazekas als Naturforscher 306.*

Balló, M. und Rózsényi, J., Bestimmung der schwefligen Säure in der atmosphärischen Luft 311.*

Bartal, A. v., Die Darstellung von Indigo 309.* — Elementarsynthese in der organischen Chemie 312.*

Bauer, M., Ein Beitrag zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen 292.* — Über das Puiseux-sche Polygon 293.* — Affektlose Gleichungen 293.*

Bence, J., und Korányi, A. v., Physikalisch-chemische Blutuntersuchungen 323.*

Bernátsky, E., Monographie der heimischen Aspargus-Arten 292.*

Biró, L., Die Fauna der Höhlen des Komitates Bihar 295.*

Bugarszky, St., Eine neue Methode zur quantitativen Bestimmung des Äthylalkohols 35.

Csiki, E., Die Verbreitung von Trochosa singoriensis Laxm in Ungarn 294.* — Über die blinden Höhlenkäfer 296.* — Die Morphocaraben Ungarns 298.* — Vier neue Coleopteren aus Ungarn und eine aus Bosnien 299.*

Daday, E., Übersicht der Mikrofauna der Süßwässer von Paraguay 293.* — Eine neue in Fischen parasitisch lebende Infusorie 293.*

Dienes, P., Zur Theorie der analytischen Funktionen 293.*

Donath, J., Eine neue Chlorinreaktion 324.*

Emszt, K., Die chemische Zusammensetzung des Bodenschlammes und des Grundbodens des Balaton-Sees 292.*

* Die mit * bezeichneten Seitenzahlen beziehen sich auf eine Erwähnung oder kurze Besprechung in den Sitzungsberichten.

Entz sen., S., Farben der Tiere und Mimicry 296.*
Ernyey, J., Über ein Werk von Szikszai Fabricius (Kovács) aus dem Jahre 1590 303.*

Fábián, G., Ein interessanter Maisstengel 300.*
Fanta, A., Eine Weintraube, an der mehrere grüne Beeren mit roten Streifen zur Entwicklung gelangten 309.*
Fejér, L., Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik 292.*
Ferenczy, J. v., Über Antimonbestimmung in Legierungen 309.*
Filarszky, N., Über unsere Crocus-Arten mit zweifelhafter Benennung 306.*
Futós, M., Polypodium vulgare L. und Polypodium vulgare β serratum Willd 301.*

Gombócz, E., Die Pflanzengeographie und die Flora des Soproner Komitates 302.*
Gorka, A., Die physiologische Funktion der Speicheldrüsen der Weinbergschnecke (Helix pomatia L.) 82, 294.* — Symbiosis 325.*
Guszmann, J., Experimente mit Implantation von Hautteilen 314.*
Györffy, J., Hymenostylium curvirostre (Ehrh.) Lindb. var. β scabrum Lindb. 307.*

Heinrich, G., Jahresbericht des gen. Sekretärs der Akademie 326.*
Högyes, A., Bericht über die Tätigkeit des Budapester Pasteurinstitutes (im Jahre 1903) 78, 291.*
Hollós, L., Die unterirdischen Pilze Ungarns 292.*
Hönig, S., Das Gesetz der Atom anziehung 293.*
Hoór, M., Neuere Beobachtungen über die dielektrischen Nachwirkungserscheinungen 292.*
Horváth, G. v., Die Raupenpräparate von Friedrich Cerva 295.*

Ilosvay, L., Elemente der organischen Chemie 325.*
Istvánffy, J., Über die Lebensfähigkeit der Borytissporen 291.*

Jávorka, S., Über einen Bastard zwischen Vinea herbacea W K. und V. minor L. 306.*
Juvancz, I., Zur Theorie der Grundoperationen der Arithmetik 293.*

Károly, I., Über den Durchgang von Hertzschen Wellen durch Elektrolyte 276.
Kautz, J., Über den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft und Wissenschaftlichkeit in unserm Vaterlande 326.*
Kerékgyártó, A., Die Blütenpflanzen Ungarns in bezug der Farbe 301.* — Die Wärmesummen in bezug auf die pflanzengeographische Verbreitung von Castanea vesca 304.*
Kiss, J., Über den Zusammenhang der gärungshindernden Wirkung mit der chemischen Gruppe der Elemente 293.*
Klatt, V., und Lenard Ph., Über die die Erdalkaliphosphore 1, 291.*
Klug, L., Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von gewissen Gebilden konstant sind 82.
Koch, A., Die fossilen Fische des Beocsiner Zementmergels 274.

König, J., Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem 293.*

Korányi, A. v. und Bence, J., Physikalisch-chemische Blutuntersuchungen 323.*

Kormos, Th., Batrachierlarven aus Ägypten 296.*

Kosutány, Th., Über die bisherigen Erfolge der die chemischen Untersuchungsmethoden landwirtschaftlicher Produkte zusammenfassenden Tätigkeit 307.*

Kövesligethy, R. v., Die Berechnung seismischer Elemente 42, 291.* — Das Erdbeben von Ceram 293.*

Krenner, J., Inesit von Nagybánya 291.*

Kümmerle, J. B., Marsilea quadrifolia in der Flora von Budapest 302.*

Kürschák, J., Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials 293.*

László, E., Schlämmapparat zur Gewinnung größerer Mengen geschlämmten Tones 310.* — Waschflasche zum Trocknen der Gase 310.* — Schwefelbestimmung in Pyriten 310.*

Lenard, Ph. und Klatt, V., Über die Erdalkaliphosphore 1, 291.*

Lengyel, G., Neuere Erscheinungen in der Flora der Umgebung von Budapest 302.* — Floristische Beiträge aus dem nördlichen Teil des Heveser Komitates 303.*

Lengyel, L., Ein Beitrag zur Thermodynamik der Pepsinverdauung 292.* — Die Reaktionswärme der Pepsinverdauung 312.*

Lenhossék, M., Über die Entwicklung der peripherischen Nervenfasern 292.* — Über die ersten Entwicklungsmomente des menschlichen Embryo und über die Implantation des Eies 318.*

Leopold, A., Über Kaolinbestimmung im Ton 308.*

Lichtenberg, A., Zur Entwicklung und Histologie des männlichen Harnrohres 293.*

Liebermann, L. und Liebermann, P., Über die Enzyme des Malzextrakts und den Mechanismus der Guajakreaktion 320.*

Lósy, J., Über das Vorkommen des Maikäfers in Ungarn 295.*

Mágocsy-Dietz, S., Taxus-Zweige aus dem Veszprémer Komitat 302.* — Die Fichte in der Tátra 303.* — Die Frucht von Paliurus aculeatus Sam. 305.* — Die Gestalt des Blattes von Convulvulus arvensis L. 305.*

Mansfeld, G., Inanition und Narkose 315.*

Méhely, L. v., Eine neue Eidechsenart 294.* — Die herpetologischen Verhältnisse des Mecsekgebirges und der Kapela 295.* — Huftiere, die auf Bäumen leben 299.*

Moesz, G., Pflanzenteratologische Nachrichten aus Brassó 302.*

Melczer, I., Über den Aragonit von Urvölgy 272.

Nagy, Ö., Bericht über einen teratologisch ausgebildeten Maiskolben und über einen Kürbisstengel mit hochgradiger Fasziation 300.*

Paszlavszky, J., Jahresbericht des Sekretärs der kgl. Ung. Naturw. Gesellschaft 330.*

Pekár, M., Das Blut und sein Kreislauf 325.*

Péterfi, M., Die Torfmoose Ungarns 301.*

Pfeiffer, J., Über Braunkohlengas 308.* — Über Wasserreinigung mit Bariumverbindungen 310.*

Picker, R., Zur Biologie und zur systematologischen Stellung des Gonokokkus 318.*

Preisz, H., Die Ursachen der beschränkten Leistung des Ultramikroskopes und unserer optischen Instrumente 325.*

Quint, J., Die Bacillarien des Römerbades nächst Budapest 307.*

Rados, G., Bericht über den Bolyai-Preis 333.

Rapaics, R., Die geschichtliche Einteilung der ungarischen botanischen Literatur 302.*

Rehm, H., Contributationes mycologicae ad floram Hungariae 301.*

Réthy M., Die neue Ausgabe des II. Bandes von W. Bolyais Tentamen 291.*

Reusz, F., Beiträge zur Anatomie und Physiologie des Kleinhirnes der Tauben 292.*

Rohrer, L. v., Über die osmotische Arbeit der Nieren 321.*

Rózsényi, J. und Balló, M., Zur Bestimmung der schwefligen Säure in der atmosph. Luft 311.*

Schafarzik, F., Daten zur genaueren Kenntnis des Szepes-Gömörer Erzgebirges 225.

Scherffel, A., Chionaster nivalis (Bohlin) Wille in der Hohen-Tátra 301.*

Schlesinger, L., Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen 290*, 292.* Über isoliertwertige Funktionen 292.* — Zur intrinsequen Geometrie der zweidimensionellen Mannigfaltigkeiten 293.*

Sigmond, A. v., Über die chemische Zusammensetzung der gebundenen „Szik"(Soda)böden des Theißtales 313.*

Szabó, Z., Einige Pflanzen aus dem Kaukasus 305.*

Szigethi-Gyula, A., Beiträge zur Anatomie der Vitiswurzel mit besonderer Rücksicht auf die durch die Phylloxera verursachte Beschädigung 303.*

Szilády, Z., Tiernamen in der ungarischen Volkssprache 300.*

Szilárd, B., Die neueren Verfahren zum Entwickeln der photographischen Platten bei Tageslicht 308.* — Über Radioaktivität des Bitterwassers von Igmánd 313.*

Szilasi, J., Beiträge zur Milchuntersuchung 312.*

Sztankovits, R., Beiträge zur Anatomie der Frucht der einheimischen Quercus-Arten 306.*

Thaisz, L., Vorarbeiten der Flora des Csanáder Komitates 304.*

Than, K. v., A kisérleti chemia elemei (Die Elemente der Experimentalchemie), Bücherschau 353.

Tafner, V., Beiträge zur Milbenfauna Ungarns 300.*

Tangl, K. und Weiser, S., Über den Glyzeringehalt des Blutes 292*, 314.*

Tellyesniczky, K., Der ruhende Kern und die Teilung des Kerns 292.* — Die Struktur und Funktion der Milz 321.*

Tézner, E., Über die Änderungen der Schleimabsonderung unter verschiedenen physiologischen Verhältnissen 292.* — Die physiologischen

Schwankungen der chemischen Zusammensetzung des Speichels 317.*

Toborffy, Z., Epidot aus dem Val di Vin 293.*

Tomek, J., Der Zusammenhang zwischen Ozonium stuposum Pers. und Agaricus (Gollybia) velutipes Curtis 303.*

Treitz, P., Untersuchung des Bodenschlammes des Balaton-Sees 292.*

Tunner, K. J., Die Morphologie des männlichen Geschlechtsapparates und der osmotische Druck des Blutes von Cybister laterimarginalis de Geer 297.*

Tuzson, J., Über einen neuen mikroskopischen Meßapparat 301.*

Ulrich, E., Beobachtungen über die Lepidopteren von Jsaszegh 298.*

Visnya, A., Über ein Kriterium der Intransivität von endlichen Gruppen linearer Substitutionen 178. — Über die Gesamtheit der Hermeteschen Invarianten einer endlichen Gruppe linearer Substitutionen 188.

Weiser, J. und Tangl, K., Über den Glyzeringehalt des Blutes 292,* 314.*

Winkler, L., Die Veränderung des Absorptionskoeffizienten der Gase mit der Temperatur 291.*

Wolcsánszky, J., Beiträge zur Moosflora Ungarns 305.*

Zaitschek, A., Zur Biochemie der Milch 307.*

Zemplén, Gy., Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung der Gase nach einer neuen experimentellen Methode 202.

Zimányi, K., Kristallographische Untersuchung des Cinnabarites 292.*

1.

ÜBER DIE ERDALKALIPHOSPHORE.

Von VIRGIL KLATT in Pozsony u. P. LENARD, korr. Mitgl. der Akademie in Kiel.*

Vorgelegt der Ung. Akademie der Wissenschaften am 17. Oktober 1904.

Wir hatten früher** gezeigt, daß die an gewissen Erdalkalisulfidpräparaten seit lange bekannte, durch große Dauer hervorragende Phosphoreszenz gebunden ist an das Vorhandensein dreier wesentlicher Bestandteile, welche sind: 1. das Erdalkalisulfid selber, 2. geringe Spuren gewisser wirksamer Metalle, 3. ein schmelzbarer Zusatz.

Als wirksame Metalle hatten wir bisher Kupfer, Mangan und Wismut genannt, als geeignete schmelzbare Zusätze eine Anzahl von farblosen Salzen. Über die Farbe der Phosphoreszenz fanden wir, daß sie durch das vorhandene Metall und das Erdalkalisulfid gegeben sei, und jedem der drei genannten Metalle schrieben wir eine Bande im Phosphoreszenzspektrum zu. Die Bande des Kupfers, welches wir bereits damals in allen drei Erdalkalisulfiden feststellten, lag im Sulfid des Kalziums im Blaugrün, des Strontiums im Gelbgrün, des Baryums im Rot.

Daß neben der angegebenen chemischen Zusammensetzung auch die physikalische oder molekulare Struktur in Betracht komme, zeigt sich darin, daß die Phosphoreszenzfähigkeit nur in

* Es werden der Akademie hier die hauptsächlichsten Ergebnisse einer Experimentaluntersuchung vorgelegt, von welcher ausführlichere Darstellung in den „Annalen der Physik“ erfolgt.

** V. Klatt u. P. Lenard, Wied. Ann. 38 p. 90. 1889, woselbst auch der früheren und damals fast gleichzeitigen Literatur auf gleichem und verwandtem Gebiete gedacht ist.

der Glühhitze, niemals auf kaltem oder nassem Wege zu erreichen ist und daß Druck sie zerstört.*

Durch das Bisherige war an Stelle der vorher unsicheren, zufälligen Erfolge bei der Bereitung phosphoreszierender Erdalkalisulfide — wie man unzutreffenderweise die gedachten Präparate meist heute noch genannt findet — die Möglichkeit getreten, eine Reihe von Substanzen wohlausgeprägter und intensiver Phosphoreszenzfähigkeit jederzeit und in immer wieder gleicher Beschaffenheit herstellen und zu weiterer Untersuchung verwenden zu können.**

Es war aber auch zu erkennen gewesen, daß die Reihe der möglichen Phosphoreszenzen gleicher Art durchaus nicht erschöpft worden sei.

Wir haben daher die Arbeit fast stetig fortgesetzt, worüber jetzt berichtet werden soll.

Wir nennen dabei Erdalkaliphosphor, oder kurz Phosphor ein Präparat, in welchem die drei eingangs erwähnten Bestandteile mit dem Resultate lange dauernden Nachleuchtens vereinigt sind. Die drei Bestandteile selber bezeichnen wir kurz als Sulfid, Metall und Zusatz. Enthält ein Phosphor nur ein einziges Metall und nur einerlei Sulfid, so nennen wir ihn einen reinen Phosphor. Zeichen wie $CaCuNa_2SO_4$ sollen zu kurzer Nennung bestimmter reiner Phosphore dienen.

Der Gang der Untersuchung, welche rund 800 Präparationsversuche und 300 Spektralbeobachtungen umfaßt, war im wesentlichen der folgende.

Zuerst suchten wir Phosphore von noch größerer Reinheit als früher zu erhalten, wozu in erster Linie größere Metallfreiheit des Ausgangsmaterials erforderlich war. Die Prüfung und Auswahl geeigneter Reindarstellungsmethoden für diese Materiale

---

* Über den letzteren Punkt s. P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 12. p. 439, 1903.

** Vgl. die Arbeiten der Herren Elster und Geitel, Wied. Ann. 44. p. 722. 1891; — R. Klatt, Math. ès phys. Lapok, Heft 3 (März) 1901 und folgende Hefte, woselbst auch bereits Beobachtungen an den *Sr Bi*-, *Sr Sb*- und *Ba Bi*-Phosphoren mitgeteilt werden; — A. Dahms, Ann. d. Phys. 13. p. 442, 1904.

und geeignete Vorsichten bei dem zur Herstellung der Phosphore nötigen Glühen ergaben uns die Möglichkeit, Phosphore von solcher Reinheit herzustellen, daß dieselben kaum mehr Spuren jener gemeinsamen Phosphoreszenzen zeigten, welche wir früher fanden und verunreinigten Metallen zuschreiben mußten. — Zugleich sind dabei die früheren Angaben über den Mangel an Phosphoreszenzfähigkeit metallfreier Präparate, zusatzfreier Präparate und reinen Erdalkalisulfides bestätigt worden. (Kapitel A.)

An den so gewonnenen Phosphoren zeigte sich nun, daß jedem Metall nicht nur eine einzige Bande im Phosphoreszenzspektrum zugehöre, sondern eine ganze Reihe von Banden, unter welchen die früher von uns genannten Banden nur dadurch sich auszeichnen, daß sie der größten Intensitätssteigerung durch geeignete Zusätze fähig sind.

Jede Bande ist ein Komplex emittierter Wellenlängen, welcher gemeinsame Eigenschaften besitzt in Bezug auf Temperatur, Erregbarkeit durch bestimmte Lichtwellenlängen, Schnelligkeit des An- und Abklingens, sowie auch in Bezug auf das Erscheinen oder Nichterscheinen mit gewissen Zusätzen. Zu bemerken ist, daß die so definierten Banden zwar immer zusammenhängende, aber durchaus nicht immer schmale Räume im Spektrum einnehmen.

Die einzelnen Banden im Phosphoreszenzspektrum klingen im allgemeinen nach Schluß der Belichtung nicht gleich rasch ab. Diejenigen Banden, welche bei Löschen des Lichtes sofort aus dem Spektrum verschwinden, nennen wir Momentanbanden im Gegensatze zu den Dauerbanden, welche das lange Nachleuchten der Phosphore bedingen. Die Momentanbanden sind im Phosphoroskop $^1/_{300}$ Sek. nach Schluß der Belichtung sehr wohl noch sichtbar. Meistens wurde mit ultraviolettem Licht beobachtet.

Indem wir weiter die Versuche auf eine größere Zahl sorgfältig rein dargestellter Zusätze erstreckten, fanden wir, daß auch die Zusätze nicht ohne Einfluß sind auf die Phosphoreszenzfarbe. Der Einfluß besteht aber nicht in einer Verschiebung von Emissionsbanden, sondern nur darin, daß verschiedene Zusätze im allgemeinen verschiedene Banden der vorhandenen Metalle mehr hervortreten lassen. Die Zusätze ordnen sich diesbezüglich in Gruppen von ganz oder fast gleicher Wirkung. (Vgl. Kap. A, 2.)

Es zeigten sich ferner außer *Cu*, *Mn* und *Bi* auch noch eine Reihe anderer Metalle als wirksam, nämlich *Pb*, *Ag*, *Zn*, *Ni*, *Sb**, wodurch eine Anzahl neuer, charakteristischer Phosphoreszenzen von zum Teil großer Intensität und Dauer verfügbar wurde.

Um die Eigenschaften dieser Phosphoreszenzen näher kennen zu lernen, haben wir sie nach mehreren Richtungen hin eingehend untersucht. Im Kap. C wird über den Einfluß der Temperatur und im Kap. E über den der Temperaturänderung berichtet, wobei die Untersuchung des Aufleuchtens beim Erwärmen besonderes Interesse hat und bei Hinzunahme des im Kap. D untersuchten Einflusses der Erregungsart einigen Einblick in die Zusammenhänge der Erscheinungen gewährte.

Überall zeigte sich, daß alle Beeinflussung der Phosphoreszenzen nur in relativer Änderung der Intensität und Dauer der einzelnen Phosphoreszenzbanden bestehe, deren maximal vertretene Wellenlänge entweder ganz oder doch fast ganz unveränderlich blieb.

Die Aussicht, Gesetzmäßigkeiten zu finden in der großen Mannigfaltigkeit der beobachteten Erscheinungen, knüpfte sich dadurch an den Versuch der Zurückführung derselben auf feste Eigenschaften der einzelnen Emissionsbanden. Wir haben diese Zurückführung überall soweit durchgeführt, als es das Beobachtungsmaterial gestattete.

Durch diese Zurückführung wurde auch eine zusammenfassende Darstellung des umfangreichen Beobachtungsmaterials möglich, und wir geben im folgenden neben der beispielsweisen Erörterung der speziellen Eigenschaften einiger der Phosphore eine Zusammenstellung der allgemeinen Resultate über die Eigenschaften der Phosphoreszenzbanden, zu welchen wir gelangt sind.**

Obgleich weit davon entfernt, bloße Hypothesen mitteilen zu wollen, glaubten wir am Schlusse doch diejenigen, die Emissions-

* Blei ist das von uns früher in Mineralpräparaten durch Phosphoreszenzbeobachtung konstatierte, aber damals nicht identifizierte und bis dahin ζ genannte Metall.

** Vielleicht ist es der Hauptgewinn unserer Arbeit, daß nun weiterer Untersuchung günstiges, vorläufig genügend gesichtetes Material reichlich vorliegt.

zentren der Phosphoreszenzbanden betreffenden Vorstellungen geben zu sollen, zu welchen die Erscheinungen uns geführt haben und wohl auch führen mußten bei dem Wunsche, sie im Zusammenhang zu sehen untereinander sowohl als mit dem sonst Bekannten.

Kapitel A.

Erfahrungen bei der Herstellung der Phosphore.

Die Phosphore wurden in derselben Weise hergestellt, wie bei unseren ersten Untersuchungen. Wir können also diesbezüglich auf unsere erste Arbeit* über die Phosphore verweisen.

Neue charakteristische Phosphoreszenzen erhielten wir mit *Pb, Ag, Zn, Ni* und *Sb*.

1. Beschreibung der neueren Phosphore.

a) *Pb-Phosphore.* Die *CaPb*-Phosphore haben mittelmäßige Intensität und auf die Farbe ihres Nachleuchtens haben die Zusätze einen großen Einfluß. Mit *Na*** waren gelbgrüne, mit *K*-Zusätzen blauviolette Phosphoreszenzen zu erhalten. *Li* nimmt eine Mittelstellung zwischen *Na* und *K* ein. Das beste Resultat ergab: 2 g *CaS* und 6 Tropfen *Pb*-Lösung (1 Tropfen enthielt $^1/_{3600}$ g metallisches *Pb*) mit 0,12 g $K_2SO_4 + 0{,}1$ g Fl_2Ca-Zusatz. Farbe: blau. Bei den *SrPb*-Phosphoren haben die Zusätze ebenfalls großen Einfluß. So gibt *Na* gelbes, K_2SO_4 blaues Nachleuchten, *Li* violette Nuancen. Der hellste Phosphor wurde erhalten: 2 g *SrS* und $^3/_4$ Tropfen obiger *Pb*-Lösung mit 0,05 g $Na_2SO_4 + 0{,}02$ g *NaFl* Zusatz. Farbe: gelb.

b) *Ag-Phosphore.* Außer den Zusätzen hat hier auch die Glühzeit einen bemerkenswerten Einfluß bei *SrAg*. Erhitzt man vorsichtig und kurz, so bekommt man Rosa mit bläulichem Schein; setzt man das Glühen fort und erhöht auch die Temperatur, so geht die Farbe in ein schwaches aber ausgesprochenes Violett

* S. Klatt u. P. Lenard, Wied. Ann. 38. p. 90. 1889.

** Mit *Na* wird nach Kap. A, 2 b) eine ganze Gruppe Zusätze von gleicher Wirkung gekennzeichnet: die Natriumzusätze. Dasselbe bezieht sich auf *K* und *Li*.

über. Einen Phosphor von letzterer Farbe erhielten wir mit 2 g *SrS*, 1 Tropfen *Ag*-Lösung (1 Tropfen hatte $^1/_{6400}$ g *Ag*-Gehalt) und 0,08 g Li_2SO_4 Zusatz, stark geglüht. *CaAg* und *BaAg* waren keine bestimmbaren Phosphoreszenzen.

c) *Zn-Phosphore.* Kein Einfluß der Zusätze. Farbe bei den *CaZn*-Phosphoren: grün, Intensität klein. Der beste *SrZn*-Phosphor wurde erhalten: 3 g *SrS* und 2 Tropfen *Zn*-Lösung (1 Tropfen $^1/_{4600}$ g *Zn*) und 0,1 g $CaFl_2$. Farbe grünlichgelb von ziemlicher Intensität. *BaZn* unbestimmt.

d) *Ni-Phosphore.* Kein Einfluß der Zusätze. 4 g *CaS* und 2 Tropfen *Ni*-Lösung (in 1 Tropfen $^1/_{32000}$ g *Ni*) mit 0,15 g $CaFl_2$ gab bei anhaltendem Glühen eine schöne tiefrote Farbe, aber von geringer Intensität. *SrNi* und *BaNi* sehr schwach.

e) *Sb-Phosphore.* Die *CaSb*-Phosphore sind schwache Phosphore und vertragen starke Hitze nicht. Die verstärkende Wirkung von den *Na*- und *Li*-Zusätzen ist nur gering. Die *SrSb*, ebenfalls von geringer Intensität, zeichnen sich durch große Verschiedenheit der Farben aus. Man erhält orangegelb, goldgelb, grünlichgelb, sogar bläuliche Nuancen. *BaSb* ist unbestimmt.

Von den früheren wirksamen Metallen wurde *Bi* und *Mn* im *SrS* und *BaS* versucht.

Bi gab in den beiden genannten Erdalkalisulfiden das hellste Leuchten, was wir überhaupt bisher erhielten. Bei einiger Fläche erhellen diese Phosphore einen mäßig großen Raum genügend, um alle Gegenstände darin erkennen zu können. In ihrer Nähe kann man eine Zeitlang lesen. Die Zusätze haben weder bei *SrBi* noch bei *BaBi* einen Einfluß auf die Farbe des Nachleuchtens.

Die schönsten Phosphore wurden erhalten: 4 g *SrS* mit zwei Tropfen *Bi*-Lösung (in 1 Tropfen $^1/_{4200}$ g *Bi*) und 0,2 g Borax (entwässert) + 0,05 g $CaFl_2$, Farbe intensiv blaugrün; 3 g *BaS* mit 1 Tropfen obiger *Bi*-Lösung und 0,1 g $K_2B_6O_{10}$, Farbe intensiv gelb. Das Nachleuchten ist bei diesen Phosphoren von einer außerordentlichen Dauer.

Die *SrMn*-Phosphore leuchten schwach; es waren nur gelbe und gelbgrüne Farben zu bekommen. Das beste Resultat gab:

3 g *SrS* mit 1 Tropfen *Mn*-Lösung, 0,1 g Na_2SO_4 Zusatz. 1 Tropfen der Lösung enthielt $^1/_{19500}$ g *Mn*. Die Phosphoreszenz von *Mn* in *BaS* war nicht bestimmbar.

2. Wirkungsweise und Menge der Zusätze.

Bei unseren ersten Versuchen war uns der Einfluß der Zusätze auf die Phosphoreszenzfarbe nicht aufgefallen, doch besteht nach unseren erweiterten Versuchen diesbezüglich kein Zweifel mehr. Wir konnten feststellen, daß

a) bei einzelnen Metallen wie *Zn*, *Bi* und *Mn* mit allen versuchten Zusätzen nur einerlei Phosphoreszenzfarbe mit großer Intensität zu gewinnen ist, wogegen bei anderen Metallen wie besonders *Pb* und *Cu* starker Einfluß der Zusätze auf die Phosphoreszenzfarbe vorhanden ist, so daß durch Variation des Zusatzes zwei oder mehrere verschiedene Phosphoreszenzfarben oder Nuancen von solchen zu großer Intensität gebracht werden konnten. So ein Verhalten zeigt z. B. *CaCu*. *Na*-Zusätze geben grüne, *K*-Zusätze blauviolette und *Li* — welches eine Mittelstellung einzunehmen scheint zwischen den anderen beiden — eine türkisblaue Phosphoreszenz. Dieses Verhalten zeigen ganze Gruppen der Phosphore.

b) Chemisch ähnliche Zusätze wirkten meist gleich. So alle Sauerstoffsalze des Natriums untereinander, desgleichen des Lithiums, des Kaliums. Chloride wirkten anders als die Sauerstoffsalze, wieder anders die Fluoride. Man bemerkt, daß bei den Sauerstoffsalzen mehr die Basis bestimmend ist für die Wirkung, bei den Haloidsalzen mehr das Haloid, und zwar wirken die Chloride meist ähnlich den Kaliumsalzen. Alle diese Regelmäßigkeiten zeigten sich am deutlichsten bei den Kalkphosphoren. Bei den Strontiumphosphoren traten schon Besonderheiten hervor; bei den Baryumphosphoren wirken die Zusätze zwar auch gruppenweise gleich oder nahezu gleich, aber nicht mehr nach so einfachen chemischen Analogien.

Entsprechend dem unter b) Gesagten werden wir zur Bezeichnung im folgenden meist abkürzend nur den wesentlichen Bestandteil des Zusatzes nennen. Z. B. *CaCuNa* für $CaCuNa_2SO_4$ + *NaFl* und *CaNiFl* für $CaNiCuFl_2$, da nach dem Gesagten

jeder dieser Phosphore eine ganze Gruppe von Zusätzen repräsentiert.

Die spektroskopische Untersuchung des Phosphoreszenzlichtes ergab ferner, daß

1. die verschiedenen Farben oder Farbennuancen des Phosphoreszenzlichtes, welche durch verschiedene Zusätze entstehen, alle aus denselben Emissionsbanden zusammengesetzt sind, die dem Metall im betreffenden Sulfid zugehören. Jeder Zusatz bevorzugt gewisse dieser Banden gegenüber von anderen, die er zurücktreten läßt. Z. B. bei *CaCu* verstärkt *Na* die grünen Banden — der Ort ihres Maximums wurde gefunden bei $\lambda = 51{,}5.10^{-5}$ mm —, *K* die blauen Banden, bei welchen der Ort des Lichtmaximums bei $\lambda = 47.10^{-5}$ mm festgestellt wurde.

2. Diese Wirkung der Zusätze auf die Banden besteht in einer Abänderung a) der Intensität und b) der Dauer ihres Leuchtens. Eine Verschiebung von Banden im Spektrum wurde nicht beobachtet.

Die Wirkung der Zusätze, die Banden der Metalle erst zur Entwicklung zu bringen, ist sichtbar begleitet von einem Einfluß auf die molekulare Struktur der Phosphore. Ohne Zusatz bildet das unscheinbare, metallhaltige Sulfid eine pulverige, lockere Masse; der Zusatz läßt sie zusammenhaften oder emailartig zusammensintern, wodurch das Volumen auch kleiner wird. Das Wesentliche der Wirkung scheint Annäherung der Atome des wirksamen Metalles — beziehlich der Moleküle von dessen Sulfid — an die Moleküle des Erdalkalisulfides zu sein, durch welche Annäherung erst das Zusammenwirken beider möglich wird, welches in Gestalt der Emissionsbanden zutage tritt, deren Eigenschaften von beiden zusammenwirkenden Komponenten, dem Metall sowohl wie dem Erdalkalisulfid, abhängen.

Die Schmelzung scheint in allen Fällen auch eine Lösung von Erdalkalisulfid im Zusatz zur Folge zu haben, wonach die Bildung besonderer Molekularkomplexe, Sulfid und Zusatz samt dem Metall enthaltend, anzunehmen wäre. Bringt man an den Rand einer Perle von Na_2SO_4, welche an einer Platinöse sich befindet, ein Körnchen Kalziumsulfid und erhitzt im oberen Reduktionsraum einer BUNSENflamme, so kann man sehen, wie von

dem Sulfidkörnchen ausgehend alsbald eine kristallinisch aussehende Wucherung die ganze flüssige Perle durchsetzt und sie schnell in eine undurchsichtige, breiige Masse verwandelt, welche beim Erkalten emailartig erstarrt. Das Kalziumsulfid hat sich also in dem ganzen Volumen des Na_2SO_4 verteilt. War das benutzte Sulfid wismuthaltig, so leuchtet die Perle in blauer Farbe wie die *Bi*-Phosphore. Es ist demnach Na_2SO_4 ein Zusatz, welcher durch Überschuß nicht nur nicht verdünnt, sondern auch durchaus nicht zerstörend wirkt auf die Phosphoreszenzfähigkeit.

Über den Einfluß der Menge der Zusätze auf die Phosphoreszenzen sind unsere Erfahrungen wie folgt zusammenzufassen:

Ist der Zusatz in sehr feiner Verteilung vorhanden, wie etwa wenn er dem Erdalkalikarbonat aus der Fällungslösung anhaftet, so genügen schon sehr geringe Mengen, um ihn wirken zu lassen. Um jedoch volle Wirkung zu erzielen, ist 0,005 g — 0,015 g des Zusatzes meist noch etwas zu wenig.* Je mehr Metall ferner vorhanden ist, um so mehr Zusatz ist auch nötig, um volle Wirkung in Bezug auf Intensität und Farbe zu erzielen.

Die Zusatzmenge 0,1 g haben wir zur Erzielung größter Intensität und Farbensättigung selten und dann nur wenig überschritten, sofern einfache Zusätze angewandt wurden. Es tritt nämlich bei größeren Zusatzmengen leicht völlige Schmelzung der Masse ein, was bedeutende Verunreinigung derselben aus den Tiegelwänden zur Folge hat und wohl schon aus diesem Grunde, auch wenn nicht außerdem der Zusatz zersetzend wirkt, stets vermindertes Leuchten ergab. Nur im Falle gemischter Zusätze konnte 0,1 g als gesamte Zusatzmenge oft mit Vorteil überschritten werden.

3. Einfluß der Menge des Metalles.

Den Einfluß der Menge der wirksamen Metalle betreffend gilt die früher gegebene Charakterisierung auch für die neu hinzugekommenen Metalle. Überall steigt die Phosphoreszenzhelligkeit mit zunehmendem Metallgehalt zuerst sehr schnell an, so daß bei Mengen, die meist unter 0,0001 g liegen, schon nahezu

* Bei 1 g Erdalkalisulfid.

maximale Helligkeit erreicht ist; das dann noch folgende geringere Ansteigen führt zu einem oft sehr weiten Bereiche so gut wie konstanter Intensität, nach dessen Durchschneidung Abfall eintritt bis schließlich zum Nichtleuchten.

Besonders bemerkenswert ist es, daß verschiedene Banden desselben Metalles auch in Hinsicht der Metallmenge, deren sie zu ihrer vollen Entwicklung bedürfen, ein verschiedenes Verhalten und also gegenseitige Unabhängigkeit zeigen.

Vergleicht man den Einfluß der Menge desselben Metalles in verschiedenen Erdalkalisulfiden, so findet man, daß in *Sr*-Sulfid die maximale Wirkung bei sehr viel geringeren Metallmengen eintritt als in *Ca*-Sulfid und *Ba*-Sulfid scheint darin das *Sr*-Sulfid noch zu übertreffen.

Zu bemerken ist, daß die Metallmenge nicht die Dauer, sondern nur die Intensität der Banden beeinflußt, soweit unsere nicht photometrischen Beobachtungen gehen.

4. Einfluß der Glühtemperatur und der Glühdauer.

Diese Faktoren beeinflussen bei der Herstellung meist die Gesamtintensität des Phosphors, d. i. alle seine Banden in gleicher Weise. Es ist im allgemeinen zur Erzielung bester Resultate, d. i. vollster Entwicklung der Banden notwendig bei so hoher Temperatur und so lange zu glühen, daß sowohl die bindende Wirkung des Zusatzes genügend zur Geltung komme, als auch zu viel Schwefelverlust durch Oxydation vermieden werde.

In einzelnen Fällen werden aber verschiedene Banden desselben Metalles in auffallend verschiedener Weise von Glühtemperatur und Glühdauer beeinflußt. Ein besonderes Beispiel hierfür bietet *Ag* in *Sr*-Sulfid. (Kap. A, 1.)

5. Über den Erdalkalisulfatgehalt der Phosphore.

Bei der von uns hauptsächlich benützten Bereitungsweise aus Erdalkalikarbonat und Schwefel mußten sämtliche Phosphore neben Sulfid auch Sulfat des Erdalkalis enthalten, und zwar die *Ca*-Phosphore nach der Umsetzungsgleichung $4\,CaO + 4\,S = 3\,CaS + CaSO_4$ 39 % Sulfat neben 61 % Sulfid. Wir haben aber

auch eine Anzahl von *Ca*-Phosphoren der Metalle *Cu*, *Mn* und *Bi* aus Kalziumsulfit hergestellt. Glüht man das gewaschene Sulfit, so entsteht nach der Gleichung $4\,CaSO_3 = CaS + 3\,CaSO_4$ ein Gemisch von 85 % Sulfat und nur 15 % Sulfid. Trotz dieses sehr geringen Sulfidgehaltes ergab diese Bereitungsweise bei gleichem Metall und Zusatzmengen Phosphore, deren Leuchtintensität um nichts geringer war als die der weit sulfidreicheren, nach der ersten Methode erhaltenen Präparate, und auch die Farbennuancen waren dieselben. Man könnte danach fast vermuten, das Kalziumsulfid, welches wir an sich auch durchaus nicht mehr phosphoreszenzfähig fanden als etwa $CaSO_4$ es auch sein mag, sei völlig überflüssig. Daß dem nicht so sei, zeigte ein Parallelversuch mit reinem $CaSO_4$, gefällt aus der gleichen Kalklösung mit Ammonsulfat, in gleicher Weise mit den gleichen Mengen von *Bi* als wirksames Metall und $Na_2B_4O_7 + CaFl_2$ als Zusatz versehen und geglüht. Die erhaltene Masse zeigte sich zwar zusammengebacken wie ein guter Phosphor, sie war aber nach Belichtung an der Sonne völlig nichtleuchtend; es fehlte ihr auch die den *CaBi*-Phosphoren eigene, zarte gelbliche Färbung.

Es ist danach zu sagen, daß das Erdalkalisulfid eines Phosphors ohne Beeinträchtigung und ohne Abänderung der Phosphoreszenzfähigkeit in sehr weitgehendem Maße ersetzbar ist durch anderes Material, daß aber die Gegenwart einer gewissen, allerdings nur geringen Menge von Schwefel in Gestalt von Sulfid unersetzlich ist für das Erscheinen der hier studierten Phosphoreszenzen.

Kapitel B.

Spektralanalytische Zerlegung des Phosphoreszenzlichtes.

Alle Banden scheinen nach demselben Gesetz abzuklingen, nur verschieden schnell.

Ganz anders verhält es sich mit dem Absinken der Gesamtemission bei den verschiedenen Phosphoren. Hier bietet jeder Fall seine besonderen Eigentümlichkeiten. Es seien beispielsweise drei Phosphore miteinander verglichen, welche das Gemeinsame

haben, während der Belichtung — mit Filter-Ultraviolett — in nahezu gleich großer Helligkeit zu leuchten und $^1/_4$ Stunde nach Schluß der Belichtung einen ebenfalls nahezu gleichen, geringen, aber noch gut sichtbaren Endwert der Helligkeit anzunehmen: *SrCuNa*, *CaBiNa* und *SrZnFl*. Der Übergang vom gleichen Anfangswert zum gleichen Endwert der Helligkeit ist bei jedem der drei Phosphore ein anderer. Bei *SrCuNa* sinkt die Intensität in den ersten Zehntelsekunden des Nachleuchtens mit großer Geschwindigkeit zu einem sehr geringen Bruchteil ihres Anfangswertes herab, um aber dann nur langsam weiter abzunehmen. *CaBiNa* klingt ebenfalls zuerst ersichtlich sehr viel schneller ab als später, aber der erste Abfall ist viel weniger stark als beim vorigen und er erstreckt sich auf mehrere ganze Sekunden. Bei *SrZnFl* wird endlich ein besonderer, anfänglicher Abfall der Helligkeit so wenig bemerklich, daß der Zeitpunkt des Löschens des erregenden Lichtes aus dem Anblick des Phosphors nicht mit Sicherheit angebbar wäre.

Dieses Verhalten des Abklingens folgt aus der verschiedenen Dauer der einzelnen Banden im Phosphoreszenzspektrum. Nämlich bei *SrCuNa* fällt die helle Momentanbande nach Löschen des Lichtes sofort ab, bei *CaBiNa* ist die helle blaue Bande, welche das Hauptlicht ausmacht, aus drei sehr benachbarten Banden zusammengesetzt, von welchen zwei viel schneller — aber nicht ganz momentan — abklingen als die dritte, bei *CaZnFl* gibt es überhaupt nur eine Bande, daher das gleichmäßige Abfallen.

Bemerkenswert ist es, daß kein einziger Phosphor anfänglich langsamen und schließlich schnelleren Intensitätsabfall zeigte. Dies und die Zusammensetzung des Phosphoreszenzlichtes aus verschiedenen, verschieden schnell abklingenden Teilen war bereits E. Becquerel bei seinen aus zufällig günstigen Ausgangsmaterialien erhaltenen Phosphoren ihm unbekannter chemischer Zusammensetzung aufgefallen und hat ihn zu dem Versuch geführt, das von ihm photometrisch verfolgte Abklingen durch Summen aus mehreren Exponentialfunktionen der Zeit* darzustellen. Daß

* E. Becquerel, „La lumière“ t. I. p. 285 u. ff.

der Versuch sich nicht als durchführbar erwies, wird verständlich, wenn man bedenkt, daß schon einem einzelnen Metalle im allgemeinen mehrere Bande von ungleicher Dauer entsprechen. BECQUERELS Phosphore aber gewiß deren mehrere enthielten.

Man sieht schon aus dem Gesagten, daß erst bei gesonderter Untersuchung der einzelnen Emissionsbanden Aussicht vorhanden ist, einfache Gesetze der Lichtemission der Phosphore zu finden.

Das Abklingen jeder Bande ist unzertrennlich verknüpft mit ihrem Anklingen derart, daß schnell abklingende Banden bei allen Arten der Erregung auch schnell anklingen, langsam abklingende auch langsam anklingen.

Es zeigte sich dies nicht nur überall bei der spektroskopischen Beobachtung der einzelnen Banden, sondern bei einzelnen Phosphoren auch in Gestalt der besonderen Erscheinung des mehrfarbigen Anklingens. Diese Erscheinung muß jedesmal dann sich bieten, wenn die Summe der momentanen Banden bei genügender Intensität eine andere Farbe für das Auge ergibt als die Summe sämtlicher Banden. Dies ist z. B. der Fall bei *Sr Mn Na*. Das Phosphoreszenzspektrum dieses Phosphors besteht aus einem roten und zwei sehr benachbarten gelbgrünen Banden. Die rote Bande ist eine Momentanbande. Bei dauernder Belichtung mit Filter-Ultraviolett zeigt das Emissionsspektrum breite Helligkeit von Rot bis in die Mitte des Grün reichend. Achtet man auf das Abklingen des Spektrums beim Löschen des erregenden Lichtes, so sieht man das Rot sogleich verschwinden und bald nur eine ziemlich schmale gelbgrüne Bande lange nachleuchtend zurückbleiben. Dies ist die Farbe des gewöhnlichen Nachleuchtens. Das schnell abklingende Rot klingt ebenso schnell auch an und das langsam abklingende Gelbgrün klingt langsam an: Betrachtet man den dunkel gewordenen Phosphor im ersten Augenblicke einer neuen ultravioletten Belichtung, so ist man überrascht, ihn nicht wie bei dauernder Belichtung oder im Nachleuchten, grün, sondern rein und hellrot leuchten zu sehen; erst allmählich nach etwa zwei Sekunden wird er grün.

Daher kommt es auch, daß man Phosphore, welche starken Anteil von Momentanbanden besitzen, sofort in großer, so gut wie voller Helligkeit aufleuchten sieht.

Daß länger dauernde Phosphoreszenzen als Ganzes auch länger brauchen, um voll erregt zu werden, kurz dauernde kürzer, wurde von E. BECQUEREL bereits bemerkt bei Substanzen von phosphoroskopisch kurzem Leuchten wie Kalkspath z. B.; für die länger dauernden Phosphoreszenzen seiner Erdalkalisulfide fand er den Satz nicht allgemein bestätigt, spricht aber die Vermutung aus, daß dies in der Zusammengesetztheit der Emission dieser Präparate seinen Grund haben dürfte. Wir sehen nun, daß in der Tat, sobald man nur jede Bande für sich betrachtet, der Satz von der Gleichartigkeit des An- und Abklingens als ganz allgemein gültig hingestellt werden kann — soweit gegenwärtig die Untersuchung geht.

Kapitel C.

Einfluß der Temperatur.

Es ist zweierlei Einfluß der Temperatur auf die Lichtemission zu unterscheiden, je nachdem es sich um das Leuchten bei konstant gehaltener Temperatur verschiedener Höhe handelt, oder um die Wirkung des Ansteigens der Temperatur, den Phosphor ohne neue Belichtung zum Aufleuchten zu bringen. Wir behandeln hier das Verhalten bei konstant gehaltener Temperatur. Die andere Wirkung wird in Kapitel E untersucht werden.

Die Phosphore wurden Temperaturen von — 180° (flüssige Luft) bis zur Rotglut — bei welcher Temperatur alles Leuchten aufhört — ausgesetzt, und da zeigte es sich, daß auch reine Phosphore ihre Phosphoreszenzfarbe ändern. Der Einfluß der Temperatur auf das Leuchten kann folgenderweise zusammengefaßt werden:

1. Die verschiedenen Farben oder Farbennuancen des Phosphoreszenzlichtes, welche ein und derselbe Phosphor bei verschiedenen Temperaturen zeigt, sind alle aus denselben bestimmten Emissionsbanden zusammengesetzt, welche dem im Phosphor wirksamen Metalle eigen sind und deren jede in ihrer besonderen Weise von der Temperatur beeinflußt wird.

2. Dieser Einfluß der Temperatur auf die Banden besteht in einer Abänderung a) der Intensität und b) der Dauer ihres Leuch-

tens. Eine Verschiebung von Banden im Spektrum durch Temperaturänderung wurde nicht beobachtet.

Der Phosphor $CaNiCuFl_2$ ist vermöge seines einfachen Spektrums — es besteht aus einer tiefroten und einer davon getrennten gelben Bande — zu diesem Versuch besonders günstig. Bei sehr niedriger Temperatur leuchtet dieser Phosphor gelb. Läßt man den auf — 180° abgekühlten Phosphor von einem Doppelmantel aus Glas umgeben, allmählich Zimmertemperatur annehmen, während es dem Filter-Ultraviolett exponiert bleibt, so bemerkt man, daß die gelbe Bande erblaßt und verschwindet, gleichzeitig aber die rote Bande allmählich auftaucht auf demselben Platze im Spektrum, wo sie bei Zimmertemperatur steht. Bei ca. — 70° sieht man deutlich beide Banden nebeneinander stehen, getrennt durch ein Minimum der Helligkeit. Von einer Verschiebung von Gelb nach Rot kann demnach keine Rede sein.

Der Einfluß der Temperatur und der der Zusätze auf die Banden sind voneinander unabhängig, d. h. der spezifische Einfluß eines bestimmten Zusatzes auf die Intensität und Dauer einer bestimmten Bande ist bei allen Temperaturen derselbe, und ebenso ist der Einfluß der Temperatur auf eine bestimmte Bande bei allen Zusätzen der gleiche.

Alles das über den Einfluß der Zusätze Gesagte gilt demnach nicht nur für die gewöhnliche Temperatur, sondern für alle Temperaturen.

Gemeinsam ist es allen Phosphoreszenzbanden, eine obere Temperaturgrenze der Erregbarkeit durch Licht zu besitzen; doch liegt die Grenze für jede Bande in anderer Höhe. Bei manchen Banden ist sie der Rotglut nahe, bei keiner weit darüber, bei vielen weit darunter.

Die niedrigsten Temperaturgrenzen, zugleich mit besonders plötzlichem Verschwinden der Erregbarkeit, finden sich bei den Baryumphosphoren, besonders des Bleies und Wismuts, deren Leuchten schon in der Nähe von + 100° aufhört. Die *Ca*- und *Sr*-Phosphore haben sämtlich höhere Temperaturgrenzen. Dicht bis zu beginnender Rotglut leuchtet z. B. die grüne Hauptbande vom *SrZn*.

Eine untere Temperaturgrenze der Phosphoreszenzfähigkeit

haben wir nicht gefunden, auch nicht die Andeutung des Bestehens einer solchen. Die tiefste von uns benutzte Temperatur: -180^0, unterscheidet sich in bezug auf die Wirksamkeit der Erdalkaliphosphore im allgemeinen in nichts von jeder andern unter der oberen Grenze gelegenen Temperatur.*

Besonders helles Leuchten entwickeln bei -180^0 die Baryumphosphore; man findet bei diesen, entsprechend der niederen Temperaturgrenzen ihrer Banden, überhaupt das ganze Erscheinungsgebiet nach der Kälte hin verschoben im Vergleich zu den *Sr*- und *Ca*-Phosphoren. Von den letzteren sei übrigens *CaNiFl* mit großer Dauer des Nachleuchtens bei -180^0 besonders genannt.

Neue, vorher unsichtbar gewesene Banden können überall zwischen -180^0 und der oberen Grenze auftauchen und zu großer Helligkeit kommen, während alte verschwinden.

Als hervorragende Beispiele für sehr mannigfachen Bandenwechsel bei Temperaturänderung seien die Wismutphosphore von *Ca* und *Sr* genannt; als gegenteilige Beispiele die *Cu*- und *Pb*-Phosphore derselben Erdalkalien, deren Hauptbanden von so großer Temperaturbeständigkeit sind, daß der Charakter des Emissionsspektrums im ganzen untersuchten Temperaturgebiet fast der gleiche bleibt.

Ganz allgemein gilt es ferner, daß die Emissionsbanden in der Kälte schmäler, schärfer begrenzt werden, in der Hitze breiter, verwaschener.** Dadurch trennen sich die verschiedenen, gleich-

---

* Man findet in der neueren Literatur mehrfach Angaben über die Phosphoreszenzen von „Schwefelkalzium", „Schwefelstrontium" und „Schwefelbaryum" bei tiefen Temperaturen; darunter auch die, daß bei -70^0 deren Leuchten aufhöre. Ohne Spezifizierung der Metalle, welche in den benutzten Präparaten wirksam waren, sind diese Angaben nicht zu verwerten. Die Grenze -70^0 paßt auf keinen der von uns untersuchten reinen Phosphore. Dagegen zeigt sich E. Becquerels Resultat, daß die Dauer des Leuchtens im allgemeinen um so geringer sei, je höher die Temperatur („La lumière" t. I. p. 390) nicht zwar ausnahmslos, aber doch für viele reine Phosphore in dem von E. Becquerel benutzten Temperaturbereiche von -20^0 aufwärts, als zutreffend. Wir gelangen später zur Aufstellung eines allgemeinen Satzes, nicht die Gesamtemission von Phosphoren, sondern deren einzelne Banden betreffend, welcher jenen Becquerelschen Satz umfaßt.

** Für die Festlegung des Maximums einer Bande im Spektrum ist

zeitig vorhandenen Banden am besten bei tiefen Temperaturen; in der Hitze dagegen fließen dicht nebeneinander liegende Banden leicht zu einem Kontinuum zusammen. Bei den Baryumphosphoren, welche eine niedrige Temperaturgrenze haben, tritt dies schon bei gewöhnlicher Temperatur ein.

Sind die in der Hitze vorhandenen Banden nicht in einer Gruppe beisammen gelegen, sondern über das ganze Spektrum verstreut und ragt keine an Intensität hervor, so ist die Folge des Zusammenfließens ein gleichmäßig erhelltes kontinuierliches Spektrum und entsprechend fahle weißliche Farbe des Phosphoreszenzlichtes. So bei *CaSbNa*, bei den *Ca*- und *SrCu*-Phosphoren, dem *SrPb* und *SrAgLi*.

Die Einteilung der Banden in momentane und andauernde hängt — wie es sich gezeigt hat — lediglich von der betreffenden Temperatur ab. Jede Bande ist nämlich in gewissem tiefen Temperaturbereich Momentanbande, bei höherer Temperatur Dauerbande und wird schließlich bei bestimmter noch höherer Temperatur wieder Momentanbande, um es dann zu bleiben bis zum Verschwinden an der oberen Grenze. Die einzelnen Banden sind demnach nur verschieden nach Lage und Umfang der betreffenden Temperaturbereiche, sowie nach Intensität, beziehungsweise Dauer ihres Leuchtens in diesen Bereichen.

Wir nennen die drei Zustände, welche hiernach jede Bande je nach der Temperatur annimmt: Kältezustand oder unterer Momentanzustand, Dauerzustand und Hitze oder oberer Momentanzustand.

Dauerzustand in mittlerer Temperatur ist der gewöhnliche Fall. Hierher gehören fast alle Banden hellen Nachleuchtens bei gewöhnlicher Temperatur (Hauptbanden). Z. B. bei *CaCu*, *CaPb*, *SrCu*.

Der Fall der Hitzebanden: Hohe Lage des Dauerbereiches besteht z. B. bei einzelnen Banden von *CaBi*, *SrZn* und *CaSb*.

Da einzelne Banden von *CaBi*, *CaNi*, *BaCu*, *BaBi* bei -180^0 Dauerzustand haben, kann man annehmen, daß das untere Mo-

deshalb stets auf Beobachtung bei tiefen Temperaturen das Hauptgewicht gelegt worden.

mentanbereich ganz unterhalb der von uns versuchten tiefsten Temperatur liegt. Wenn, wie bei *CaMn*, *SrMn* und *BaCu* gewisse Banden uns immer nur als Momentanbanden erscheinen, so müßte nach unseren Ausführungen deren Dauerzustand ganz unter -180^0 liegen.

Diese Fälle gehen natürlich über die Beobachtung hinaus. Zu bemerken aber ist, daß keine Bande dieser Auffassung widerspricht.

Die drei Temperaturbereiche jeder Bande sind von unveränderlicher Lage, da die Wirkung der Temperatur von den Zusätzen und der Metallmenge und wie wir später (Kap. D) sehen werden, auch von der Erregungsart unabhängig ist.

Die Unabhängigkeit von den Zusätzen hat für letztere eine gewisse Beschränktheit der Wirkung zur Folge. Denn dieselben können demnach eine Bande, welche in einem der beiden Momentanzustände der Temperatur sich befindet, niemals zur Dauer bringen. Sie können nur innerhalb des Dauerbereiches die Größe der Dauer abändern, im übrigen in allen Bereichen auf die Intensität wirken.

Es wird danach verständlich, daß alle Versuche fehlschlagen mußten, einen Zusatz zu finden, welcher beispielsweise die rote oder die grüne *CaBi*-Bande bei gewöhnlicher Temperatur zu hellem Nachleuchten gebracht hätte. Der Erfolg, daß hell stets nur Blau erschien, geht nun als der einzig mögliche aus den Temperatureigenschaften der vorhandenen Banden hervor. Ganz allgemein muß es als gegeben erscheinen, daß starker Einfluß der Zusätze auf die Phosphoreszenzfarbe bei gewöhnlicher Temperatur nur dort gefunden werden konnte, wo mehrere genügend verschiedenfarbige Banden Dauerzustand bei gewöhnlicher Temperatur haben, das ist bei den *Cu*-, *Pb*-, und *Ag*-Phosphoren.

Kapitel D.

Über die Erregung der Phosphore.

Spektrale Erregungsverteilung.

Mit diesem Namen — oder kurz Erregungsverteilung — bezeichnen wir den Zusammenhang zwischen der Länge der erregenden Lichtwellen und der Intensität des erregten Phospho-

reszenzlichtes. Dabei ist wieder jede Bande des letzteren gesondert zu betrachten. Die Erregungsverteilungen werden unmittelbar sichtbar, wenn man auf den flächenhaft ausgebreiteten Phosphor ein schmales Spektrum entwirft* und dieses nach der Methode der gekreuzten Spektren durch ein Prisma betrachtet.

Beobachtungsmittel und Verfahren.

Das erregende Spektrum wurde durch ein Quarzprisma und Quarzlinsen entworfen. Die Breite des Spektrums, gleich der Länge des Spaltes, wurde für die Beobachtung gekreuzter Spektren auf 1 mm reduziert, so daß dieses schmale Spektrum als lineare Lichtquelle an Stelle des Spaltes wirken konnte für den zur Beobachtung dienenden Prismensatz, welcher samt einer als Lupe wirkenden Linse einem kleinen Taschenspektroskop entnommen war. Derselbe war auf einem Schlitten verschiebbar, so daß jeder beliebige Teil des auf dem Phosphor entworfenen Spektrums zur Beobachtung gelangen konnte.

Als erregendes Licht wurde hauptsächlich benutzt Kohlenbogenlicht, das an brechbarem Ultraviolett sehr reiche Zinkbogenlicht und das Licht einer NERNSTschen Lampe.

Manches war besser ohne das lichtschwächende, zerlegende Prisma zu sehen, wenn man den spektralbelichteten Phosphor durch eine lichtstarke Lupe betrachtete. So zeigt Mehrfarbigkeit des ultravioletten Spektrums unmittelbar an, daß die verschiedenfarbigen Banden des betreffenden Phosphors verschiedene Erregungsverteilung haben müssen, und die Maxima und Minima der Erregungen der einzelnen Banden waren so manchmal mit besonderem Vorteil feststellbar. Auch konnte man farbige Medien vor das Auge bringen, welche von Fall zu Fall so abgepaßt wurden, daß sie nur eine einzige Emissionsbande des Phosphors durchließen, wodurch die Erregungsverteilung dieser Bande gesondert ersichtlich wurde. Banden von langer Dauer sonderten sich im Nachleuchten von dem Rest der Emission, wodurch ihre Erregungsverteilung zuletzt für sich allein sichtbar übrig blieb.

* Wie wohl zuerst von E. BECQUEREL an seinen Präparaten unbekannter Zusammensetzung angeführt „La Lumière" T. I, p. 298, 1867.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen können folgenderweise zusammengefaßt werden.

Jede Phosphoreszenzbande hat ihre besondere spektrale Erregungsverteilung. Im Gebiete der sichtbaren und ultravioletten Wellen bis 0,0002 mm Länge finden sich im allgemeinen mehrere Maxima und Minima der Erregung für jede Bande. Nur bei wenigen Banden reicht die Erregung weit ins sichtbare Gebiet hinein. Phosphore, welche solche Banden als Dauerbanden besitzen, müssen durch besonders helles Nachleuchten bei Erregung mit Tageslicht ausgezeichnet sein. So bei den *Bi*-Phosphoren aller drei Erdalkalien, den *BaCu*, *SrZn*, *CaNi*-Phosphoren und den blauen *SrCu*-Phosphoren. Die Erregungsverteilung steht auch im Zusammenhange mit den Eigenfärbungen der Phosphore.

Wenn sichtbares Licht erregend wirken soll, muß es dem Energieprinzip zufolge auch absorbiert werden, was als Eigenfärbung des Phosphors merklich werden kann. Daß solche Eigenfärbungen wirklich vorhanden und wesentlich sind für die Phosphoreszenzfähigkeit, haben wir bereits hervorgehoben. In der Tat sind gelbliche Färbungen bei den Wismutphosphoren aller drei Erdalkalien und bei *CaNiFl*, entsprechend der von den Erregungsverteilungen der Hauptbanden dieser Phosphore verlangten Absorption von Blau und Violett. Rötlich ist die Färbung bei $BaCuLi_3PO_4$ und in geringerem Maße auch bei *BaCuNaFl*.

Diesen Fällen deutlichen Zusammenhanges zwischen Erregungsverteilung und Eigenfarbe stehen andere Fälle gegenüber, bei welchen anzunehmen sein dürfte, daß auch noch andere Lichtabsorptionen als die zur Erregung dienenden mitspielen. So z. B. bei *SrZnFl*.

Die Stockessche Regel, daß die Wellen des erregten Lichtes stets länger seien als die des erregenden Lichtes, hat sich bei keiner der 64 untersuchten Banden deutlich verletzt gezeigt. Betreffend die Fälle nicht gelöster Bandengruppen ist auf die unmittelbare Beobachtung hinzuweisen, daß das gekreuzte Spektrum des Phosphorlichtes zwar oft verschmolzen war mit dem schrägen Spektrum des reflektierten Lichtes, niemals aber deutlich über dasselbe hinausging.

Die Dauer einer Bande ist unabhängig von der Art der Er-

regung, sei es, daß es sich um Licht verschiedener Wellenlängen handle oder auch um andere Erregungsarten, wie Zinkfunkenlicht und Kathodenstrahlen. Als Beispiel für dieses Verhalten stehe hier der *SrMnNa*-Phosphor, welcher im Spektrum eine rote (Momentanbande) und zwei grüne Banden (Dauerbanden) besitzt. Wurde der Phosphor im linearen Spektrum exponiert und letzteres mit einem gekreuzten Prisma beobachtet, so zeigte sich, daß die Momentanbande stets längs des ganzen erregenden Spektrums schnell, die Dauerbanden hingegen langsam an- und abklangen.

Nur die relative Intensität der Banden ist im allgemeinen eine andere, und sie kann unter dem Einflusse schneller Kathodenstrahlen leicht sehr viel größer werden als mit Licht.

Momentane und andauernde Banden bleiben solche unter sonst gleichen Umständen bei verschiedenartiger Erregung. Ungünstige Erregung konnte nur ihre Intensität beeinträchtigen.

Die spektralen Erregungsverteilungen sind unabhängig von der Art des Zusatzes sowohl wie auch von der Temperatur. Um die letztere Frage zu beantworten, haben wir eine Anzahl von Phosphoren unter Erhitzung dem Quarzspektrum exponiert. Die Phosphore befanden sich dabei in einem Quarzrohre, in dessen Längsrichtung das Spektrum fiel; die Erhitzung geschah durch eine wenig leuchtende Bunsenflamme. Die Antwort auf die gestellte Frage fiel überall verneinend aus. Die verschiedenen Farben verschwinden der Reihe nach, je nach den ihnen entsprechenden Temperaturen, ohne aber die Erregungsverteilung dabei zu ändern.

Die spektralen Erregungsverteilungen gehören demnach als ganz unveränderliche Attribute zu ihren betreffenden Banden.

Kapitel E.

Aufleuchten beim Erwärmen.

Wir haben bisher konstante, beziehungsweise sehr langsam veränderliche Temperatur vorausgesetzt. Bei schneller Temperaturänderung treten besondere Erscheinungen zu Tage: Temperaturanstieg verstärkt im allgemeinen die Lichtemission eines vorbelichteten Phosphors, Temperaturabstieg schwächt sie. Das Auf-

leuchten beim Erwärmen, welches auch bei andern phosphoreszenzfähigen Körpern sich findet, ist eine bereits lange bekannte Erscheinung; sie wurde wohl zuerst am Flußspat bemerkt*, doch scheint sie nicht immer genügend in Zusammenhang gehalten worden sein mit den vorausgegangenen Erregungen des untersuchten Körpers, als wesentlicher Bedingung für ihr Auftreten. Die hier untersuchten Phosphore zeigten die Wirkung der Temperaturänderungen sämtlich in sehr auffälliger Weise. Tauchte man das zu hellem Leuchten erregte Präparat in das Kältebad, oder nahm man es leuchtend aus dem Erhitzungsgefäß heraus, so hatte die eintretende Abkühlung stets beträchtliches Sinken der Emission, meist fast Verlöschen zur Folge. Umgekehrt steigerte das Einbringen in den Erhitzungsapparat das Leuchten oft zu ganz außerordentlicher Intensität. Geht man, wie im letztgenannten Falle, von der Zimmertemperatur aus, so gelangt man beim Erhitzen bald an die obere Temperaturgrenze, bei welcher auch das Aufleuchten aufhört. Am besten war die Erscheinung zu verfolgen, wenn man den Phosphor bei -180^0 längere Zeit belichtet hatte und von da ab seine Temperatur bis über jene Grenze hinaussteigen ließ.

Wir haben diesen Versuch bei allen repräsentierenden Phosphoren durchgeführt. Das erste Erwärmen geschah dabei durch kurze Berührung mit dem Finger, was oft grelles Licht hervorbrachte; durch wiederholte Berührung mit der Hand wurde bald Zimmertemperatur erreicht, worauf das Erhitzen über einer kleinen, wenig leuchtenden Flamme solange weiter fortgesetzt wurde, bis alles Leuchten aufhörte. Dabei durchlief die Emission im allgemeinen verschiedene Stadien der Intensität und auch der Farbe und zwar so, daß zu jeder durchlaufenen Temperatur ein bestimmtes dieser Stadien gehörte. War die Anfangstemperatur -45^0 oder Zimmertemperatur, so fehlte von der Reihe der Stadien der Anfang, entsprechend den nicht durchlaufenen Temperaturen; der Rest war derselbe, wie beim Ausgehen von -180^0. Die so gemachten Beobachtungen haben wir durch besondere Versuche an einigen Phosphoren ergänzt, wie hierüber zu berichten, ohne

* Vgl. E. Becquerel, l. c. I, p. 93.

sie durch genaue Temperaturmessungen verfeinert oder in allen Einzelheiten erschöpft zu haben.

Die Resultate lassen sich in die folgenden Behauptungen zusammenfassen:

1. Ohne vorhergegangene Belichtung erfolgt kein Aufleuchten bei Temperaturanstieg. Hat der Phosphor durch langes Liegen im Dunkeln oder, schneller, durch Erhitzen bis zur oberen Temperaturgrenze all sein Leuchten einmal verausgabt, so bringt keinerlei Erhitzung oder Abkühlung und Wiedererhitzung ihn zum nochmaligen Aufleuchten.

Beispiele: *CaBiNa* sowie *SrBiNa*, an der Sonne, am besten unter Schütteln in einem Probierrohre belichtet, zeigen über der nichtleuchtenden Bunsenflamme erhitzt ganz besonders intensives Aufleuchten; hat man aber die Erhitzung, stets unter der Rotglut bleibend, etwa 10 Minuten lang fortgesetzt, so ist das Leuchten unsichtbar geworden. Kühlt man danach das Rohr im Dunklen mit Wasser ab und erhitzt von neuem, so erfolgt nunmehr kein merkliches Aufleuchten. Man muß von neuem belichtet haben, um solches zu erhalten. Wartet man aber bei der ersten Erhitzung vollständiges Ausleuchten nicht ab, sondern unterbricht dasselbe durch Kühlen auf -180^{0}, so erscheint danach bei der zweiten Erhitzung die unmittelbare Fortsetzung des Ausleuchtens, beginnend mit schätzungsweise derselben Intensität, bei welcher das erste Erhitzen abgebrochen wurde.

2. Die während des Temperaturanstieges erfolgende Lichtemission eines vorbelichteten Phosphors hat dieselbe spektrale Zusammensetzung wie sein Nachleuchten bei konstanter Temperatur und zwar in jedem Augenblicke des Anstieges wie dasjenige Nachleuchten, welches der augenblicklich durchlaufenen Temperatur entspricht. Es erscheinen also stark diejenigen Banden des Phosphors, welche bei der eben durchlaufenen Temperatur Dauerbanden desselben sind, schwächer die Banden, welchen bei dieser Temperatur schnelleres Abklingen eigen ist und garnicht die Momentanbanden dieser Temperatur.

Damit sind die Erscheinungen des Aufleuchtens beim Erwärmen vollkommen zurückgeführt auf das Verhalten bei konstanter Temperatur.

Die Sätze 1. und 2. können in die Behauptung zusammengefaßt werden: Das Aufleuchten beim Erhitzen sei nicht als eine besondere Art der Erregung des Phosphors durch Wärmezufuhr aufzufassen, sondern es sei eine durch Herbeiführung geeigneter Temperatur ausgelöste aufgespeichert gewesene Erregung. Daß die Wärmezufuhr nicht erregend auf den Phosphor wirkt, geht am augenfälligsten vielleicht aus der besonderen Tatsache hervor, daß Momentanbanden, welche während Erregung mit Licht oft so hell strahlen können, durch Temperaturanstieg niemals zum Vorschein zu bringen sind. Besonders charakteristisch waren folgende Fälle: *CaPbNa*, *CaSbNa*, welche bei -180^0 und -45^0 keine Dauerbanden haben, blieben dementsprechend solange dunkel, bis sie etwa Zimmertemperatur erreichten und begannen dann erst aufzuleuchten. Die *Sr*-, *Cu*-, *Pb*-Phosphore, deren Banden bei -180^0 geringe, bei Zimmertemperatur größere Dauer haben, begannen mit düsterem Aufleuchten, das mit Annäherung an die Zimmertemperatur immer heller wurde. *BaCuNaFl* und $BaBiK_2B_6O_{11}$, welche in tiefster Kälte starke Dauerbanden haben, begannen sofort beim Herausnehmen aus der flüssigen Luft mit grellem Aufleuchten. Beobachtet man das Spektrum des aufleuchtenden Phosphors bei verschiedenen Temperaturen, so sieht man nur jene Banden, welche bei der betreffenden Temperatur Dauerzustand haben.

Die Sätze 1.—2. entsprechen im allgemeinen der bereits von E. Becquerel gebildeten Vorstellung, daß jedem Phosphor ein gewisses Aufspeicherungsvermögen zukomme für die Vorbedingungen des Nachleuchtens, und daß dieses Aufspeicherungsvermögen in der Hitze kleiner sei als in der Kälte. Wir werden jedoch sehen, daß die Vorstellung zu verfeinern ist, um die beobachteten Tatsachen zu umfassen. Die Verfeinerung geht nach zwei Richtungen: Erstens ist jede Bande gesondert zu behandeln von allen übrigen Banden desselben Phosphors, zweitens sind die drei Temperaturzustände der Banden zu berücksichtigen, deren jeder sein besonderes Verhalten hat in bezug auf Erregungsaufspeicherung.

Hierzu kommen wir durch folgende Beobachtungen:

Da beim Erhitzen eines kalt vorbelichteten Phosphors alle Dauerbanden desselben der Reihe nach zum Erscheinen kommen,

kann auch der Fall des Erscheinens von Banden eintreten, welche bei der Temperatur der Belichtung gar keine Intensität besaßen. Folgendes ist ein Beispiel hiervon: *CaBiNa* zeigt bei -50^{0} weder während, noch nach Belichtung etwas von der grünen Bande im Spektrum; die Erregung bei dieser Temperatur scheint ausschließlich der roten Bande und den blauen Banden gegolten zu haben, in deren Farbengemische der Phosphor purpurn indigo leuchtet. Erwärmt man ihn aber ohne weitere Erregung, so findet man, sobald nur die Temperatur diejenige Höhe erreicht hat, bei welcher die grüne Bande dauernd wird, diese Bande so intensiv betätigt, daß helles grünes Leuchten erfolgt. Man könnte nach dieser Beobachtung meinen, daß dieselbe Erregung, welche zur Zeit ihrer Aufspeicherung nur den blauen und roten Banden galt, sofern sie von diesen nicht verbraucht wurde, später beim Erhitzen der grünen zugute kam. Diese Vorstellung der Aufspeicherung von Erregung schlechthin wäre jedoch unzutreffend, wir werden vielmehr sehen, daß jede Bande ihre eigene Erregung erfährt und für sich allein aufspeichert, so daß keine andere Bande sie verbrauchen kann.

Belichtet man nämlich einen Phosphor im Quarzspektrum, wie zur Beobachtung seiner Erregungsverteilung und erhitzt ihn dann im Dunkeln, so daß er aufleuchtet, so sieht man die Erregungsverteilung der Dauerbanden der Reihe nach erscheinen, z. B. bei *CaBiNa* zuerst die richtige Verteilung des Blau (die blaue Bandengruppe ist bereits bei gewöhnlicher Temperatur von Dauer), dann später, bei höherer Temperatur, erst das Grün (die grüne Bande ist Dauerbande in der Hitze), in welcher das Grün auch erscheint, wenn man den Phosphor in heißem Zustande spektral belichtet. Man sieht daraus, daß das grüne Aufleuchten nicht aus dem im Phosphor vorhandenen Erregungsvorrat überhaupt stammte, sondern daß es seinen eigenen besonderen Erregungsvorrat gehabt haben mußte; denn es erschien in seiner besonderen spektralen Verteilung, durchaus nicht an allen überhaupt erregten Stellen des Phosphors. Auch mußte die besondere Erregung des Grün unverbraucht im Phosphor geblieben sein, während die anderen blauen Banden aufgeleuchtet hatten, solange bis die Temperatur erreicht war, bei wel-

cher das Grün Dauerbande und also des Aufleuchtens fähig wurde.

Man sieht aus diesem Falle, welcher ein herausgegriffenes Beispiel unter vielen beobachteten gleichen Fällen ist, daß nicht nur jede Bande für sich allein erregt wird, sondern daß bei Erregung einer Bande im unteren Momentanzustand (wie die grüne *CaBi*-Bande) zweierlei Prozesse zu unterscheiden sind, welche unabhängig nebeneinander hergehen, obgleich sie durch dieselben zur betreffenden Bande gehörigen, einfallenden Lichtwellenlängen bewirkt werden. Nämlich (a) das momentane Leuchten der Bande und (b) die unsichtbare Aufspeicherung von Erregung derselben Bande.

Da wir ferner sahen, daß überhaupt nur Dauerbanden aufleuchten, d. h. Banden, welche gerade den Dauerzustand passieren während des Erhitzens, niemals Momentanbanden, so folgt, daß Belichtung im oberen Momentanzustand niemals zum Aufleuchten führen kann beim Erhitzen, woraus zu schließen ist, daß im oberen Momentanzustand überhaupt keine Aufspeicherung von Erregung stattfindet.

In Zusammenfassung kommt man danach zu folgender Vorstellung über die drei Bandenzustände:

Im ersten Zustand, welchen wir den unteren Momentanzustand oder Kältezustand nannten, laufen bei erregender Belichtung zwei die Bande betreffende Prozesse gleichzeitig im betreffenden Phosphor ab; nämlich erstens schnell an- und abklingendes Leuchten der Bande und zweitens eine mit der Dauer und der Intensität der Belichtung asymptotisch anwachsende Aufspeicherung von Erregung. Diese Aufspeicherung ist in diesem ersten Zustande von außerordentlicher Vollkommenheit, d. h. sie bleibt für außerordentlich lange Zeiten im Phosphor enthalten, ohne zum Leuchten der Bande verbraucht zu werden. Beide Prozesse, der momentane Leuchtprozeß und die Aufspeicherung werden zwar durch dieselben erregenden Lichtwellen von bestimmten Längen betätigt, verlaufen aber unabhängig voneinander; einer derselben kann auch zurücktreten bis zum Fehlen. Fehlt der erste Prozeß, so bleibt die Bande in diesem Kältezustande völlig unsichtbar; erst nachträgliche Überführung in den zweiten Zu-

stand, durch Erhöhung der Temperatur, macht die erfolgte Aufspeicherung sichtbar dadurch, daß sie dann dem Verbrauch zum Leuchten der Bande verfällt. Fehlt der zweite Prozeß, so leuchtet die Bande zwar, aber es wird nichts aufgespeichert.

Im zweiten Zustande, welchen wir Dauerzustand nannten, wird gleichzeitig sowohl Erregung aufgespeichert, auch solche zum Leuchten der Bande verbraucht. In diesem Zustande ist also die Aufspeicherung von minderer Vollkommenheit als im ersten Zustande; sie verfällt mindestens zum Teil unvermeidlich dem genannten Verbrauch, welcher sofort mit dem Eintritt der Erregung beginnt. Die Aufspeicherung wächst übrigens asymptotisch mit der Dauer und der Intensität der erregenden Belichtung, wie im ersten Zustand. Was in diesem zweiten Zustande bei erregender Belichtung sichtbar wird, ist allmähliches Anklingen der Bande, entsprechend der asymptotisch steigenden Aufspeicherung, welche auch steigenden Verbrauch zur Folge hat, nach Schluß der Belichtung allmähliches Abklingen der Bande, entsprechend dem allmählichen Verbrauch noch aufgespeichert gebliebener Erregung.

Im dritten Zustande, welchen wir oberen Momentanzustand oder Hitzezustand der Bande genannt haben, findet Aufspeicherung nicht mehr statt; schnell an- und abklingendes Leuchten ist alles, was erregende Belichtung noch hervorbringt. Das Bereich dieses Zustandes endet bei der oberen Grenztemperatur der betreffenden Bande, wo deren Erregbarkeit durch Licht aufhört. Diese Temperatur lag bei manchen Banden nahe der Rotglut, bei vielen aber weit darunter.

Die drei Zustände bestehen zwar jeder in besonderem, meist wohlerkennbarem, für die betreffende Bande charakteristischem Temperaturbereich, sie gehen aber an den Grenzen sowohl wie auch innerhalb dieser Bereiche allmählig mit ihren geschilderten Eigenschaften ineinander über.

Kapitel F.

Analogien verschiedener Banden.

Vergleicht man die im Vorhergehenden studierten Banden auf ihre Eigenschaften hin untereinander, so findet man gewisse Analogien bestehen, nicht nur zwischen Banden desselben Metalles in den drei Erdalkalisulfiden, sondern auch zwischen Banden verschiedener Metalle im selben Sulfid. Die Analogien sind jedoch nicht einfacher Art und bei gegenwärtiger Kenntnis keiner exakten Fassung fähig; sie gleichen hierin den chemischen Analogien der Metalle und bestehen, wie diese, gruppenweise. Die drei Gruppen, in welche die als wirksam gefundenen Metalle sich ordnen, sind, soweit zu sehen: *Cu, Pb, Ag, Zn — Mn, Ni — Bi, Sb.*

Die einzelnen Metallgruppen können charakterisiert werden wie folgt.

1. Kupfergruppe. Jedes Metall besitzt zwei weit im Spektrum auseinander liegende Banden, beziehungsweise Bandengruppen mit Dauerzustand bei gewöhnlicher Temperatur oder doch in der Nähe derselben. Beide sind großer Intensität und Dauer fähig und zwar die minder brechbare meist mit *Na*-Zusätzen, die brechbarere mit *K*-Zusätzen, was im allgemeinen großen Einfluß der Zusätze auf die Farbe des Nachleuchtens bei gewöhnlicher Temperatur ergibt. Im einzelnen ist zu sagen, daß die Temperatur maximaler Dauer bei der brechbareren Bande meist tiefer liegt als bei der anderen. Besonders bei *SrPb* und *BaCu* bildet die gewöhnliche Temperatur bereits obere Grenze des Dauerzustandes von der brechbareren Bande, daher kein Zusatz das Violett der ersteren oder das Blau der letzteren Phosphore bei gewöhnlicher Temperatur zu besonderer Dauer bringen konnte.

2. Die Metalle der Mangangruppe haben nur je eine Hauptbande, im sichtbaren Gebiet mit Dauerzustand bei gewöhnlicher Temperatur, was Einfluß der Zusätze auf die Farbe des Nachleuchtens bei dieser Temperatur ausschließt.

3. Bei den Gliedern der Wismutgruppe herrscht große Mannigfaltigkeit an intensitäts- und dauerfähigen Banden mit sehr verschieden gelegenen Temperaturbereichen, wodurch hier besonders großer Einfluß der Temperatur auf die Phosphoreszenzfarbe

resultiert. Die bei gewöhnlicher Temperatur im Dauerzustand befindlichen Banden liegen im Spektrum meist so nahe beieinander, daß — wie bei der vorigen Gruppe und im Gegensatz zur *Cu*-Gruppe — die Zusätze wenig Einfluß auf die Farbe des Nachleuchtens bei gewöhnlicher Temperatur haben können.

Was im besonderen die Banden ein und desselben Metalles bei den drei Erdalkalien anlangt, so findet man in der Kupfergruppe und bei den *Bi*-Phosphoren eine Verschiebung der als analog einander zugeordneten Banden nach dem Rot hin beim Übergang von *Ca* zu *Sr* und *Ba**. Die Wellenlängenzunahme beträgt für die am deutlichsten analogen Banden etwa ebensoviel. Hervorzuheben ist aber, daß jene Regel der Verschiebung nach dem Rot hin bei Mangan im Stiche läßt.

Allgemeiner und auch deutlicher gilt dagegen die Regel der Verschiebung nach Rot hin von *Ca* zu *Sr* zu *Ba* für die Erregungsverteilungen analoger Banden derselben Metalle. Bei den *Sr*- und noch mehr bei den *Ba*-Phosphoren sind dementsprechend die Erregungsverteilungen im allgemeinen viel weiter ins sichtbare Gebiet hineingerückt, als bei den *Ca*-Phosphoren.

Besonders und wiederholt zu bemerken ist, daß gemeinsame Banden aller *Ca*-, aller *Sr*- oder *Ba*-Phosphore nicht bestehen. Wohl erscheinen manche Banden in gleicher spektraler Lage, z. B. gewisse Banden von *SrPb*, *SrZn* und *SrAg* bei $\lambda = 55.10^{-5}$ mm, doch unterscheiden sie sich dann nach Erregungsverteilung beziehungsweise Temperatureigenschaften, sind also keineswegs identisch.

Ebensowenig wie gemeinsame Banden finden sich auch gemeinsame Erregungsverteilungen oder auch nur gemeinsame Erregungsmaxima weder bei Phosphoren eines und desselben Erdalkalis, noch auch überhaupt.

Man muß danach zugeben, daß sowohl die Emission des Phosphoreszenzlichtes, als auch die Absorption des erregenden Lichtes durch die in den Phosphoren befindlichen Metallatome

---

* Dies ist bereits beim ersten hierfür gelieferten Beispiel der *Cu*-Phosphore der *CaSr* und *Ba* an deren Hauptbanden hervorgetreten: Wied. Ann. 38, p. 96—98, 1889.

bewirkt wird, was der früher bereits ausgesprochenen Auffassung* entspricht, daß die Phosphoreszenzen den Metallen zuzuschreiben seien, nicht den Erdalkalisulfiden.

Der Zugehörigkeit der Phosphoreszenzen zu den Metallatomen entspricht es auch, daß chemisch ähnliche Metalle analoge Phosphoreszenzbanden hatten. Zugleich zeigen aber die Regelmäßigkeiten bezüglich der Verschiebung der Erregungsverteilung nach Rot an, daß das Sulfidmolekül mitbeteiligt sei an den Bestimmungsstücken der Schwingungsdauer der Emission sowohl als der Absorption. Den Molekülen des Zusatzes dagegen fehlt solche Beteiligung, denn sie verschieben weder die Banden, noch die Erregungsverteilungen, sie bewirken nur eine bevorzugende Auswahl unter den durch die Natur des Metallatomes zusammen mit dem Sulfid als möglich gegebenen Schwingungsdauern.

Kapitel G.

Schluß.

a) Allgemeine Bandeneigenschaften.

Die Mannigfaltigkeit charakteristischer Erscheinungen, welche an den von uns hergestellten reinen Phosphoren zu beobachten waren, muß als außerordentlich groß und zugleich als sehr verwickelt bezeichnet werden; sie widerstrebt jedem Überblick, solange man einen Phosphor als einheitliches Ganzes betrachten will.

Erst die spektrale Zerlegung der Emission und die gesonderte Betrachtung der einzelnen Teile derselben, welche, auch bei reinen Phosphoren, voneinander völlig verschiedene Eigenschaften haben können, führt zu einem Verständnis der Erscheinungen.

In dieser Weise haben wir die an allen Phosphoren bei beliebiger Erregungsart und beliebiger, zunächst konstant gehaltener Temperatur, beobachteten Erscheinungen zurückführen können auf bestimmte, feste Eigenschaften einer Anzahl von Emissionsbanden, deren jede einem Metall und einem Sulfid zugehört.

Auch die Erscheinungen bei veränderlicher Temperatur — darunter die des Aufleuchtens beim Erwärmen — waren zurück-

* Wied. Ann. 38, p. 107, 1889.

führbar auf dieselben, für Leuchten bei konstanter Temperatur geltenden Eigenschaften derselben Banden.

Die Eigenschaften dieser Banden sind einfacher Art: sie betreffen das An- und Abklingen, den Einfluß der Zusätze, der Metallmenge, der Temperatur und der verschiedenen Erregungsarten auf die Intensität und die Dauer ihres Leuchtens.

Die Einfachheit besteht im besonderen auch darin, daß die verschiedenen, genannten Faktoren unabhängig voneinander auf jede Bande wirken. Zudem fanden wir Analogien in den Eigenschaften verschiedener Banden bestehen (Kap. F).

In Zusammenfassung sind es folgende allgemeine Bandeneigenschaften, aus welchen man das gesamte, hier vorzugsweise studierte Erscheinungsgebiet aufgebaut findet:

Jede Bande hat ihre bestimmte Lage im Spektrum; zugleich entsprechen ihr bestimmte, andere Wellenlängen, welche erregend auf sie wirken. Für jede Bande gibt es bestimmte Zusätze, welche sie verstärken. Endlich ist jede Bande fähig, drei verschiedene Zustände anzunehmen, deren jeder an ein bestimmtes, für die betreffende Bande festliegendes Temperaturbereich gebunden ist, wie dies bereits weiter oben ausgeführt wurde (Kap. E).

Als besondere Eigenschaft aller Banden ist ihre gegenseitige Unabhängigkeit hervorzuheben. Von den verschiedenen Banden eines und desselben reinen Phosphors hat jede ihre besonders gelegenen Temperaturbereiche, jede wird durch besondere Lichtwellenlängen vorzugsweise erregt und speichert dabei ihre Erregung für sich allein auf, so daß keine andere Bande sie verbrauchen kann.

b) Vorstellungen über die Emissionszentren der Banden.

Betrachtet man nach Kenntnis des Vorhergehenden einen Phosphor, so muß derselbe als ein Gemisch mehrerer, verschiedener Sorten von Emissionszentren erscheinen; für jede Bande eine Sorte und jedes Zentrum selbständig und in der Hauptsache unabhängig von den anderen funktionierend.

Jedes dieser Zentren muß die besonderen Eigenschwingungsdauern der Absorption (Erregungsverteilung) und der Emission besitzen, welche der betreffenden Bande zugehören. Als wesent-

liche Bestandteile der Zentren sind Atome des Metalles, Erdkalimetalles und Schwefels anzusehen, welche zusammen maßgebend sind für die Möglichkeiten jener Schwingungsdauern (Kap. A).

Die Zusätze, Glühtemperatur und ähnliche Faktoren (Kap. A 2, 3, 4), welche nur eine bevorzugende Auswahl unter den durch Metall und Erdkali als möglich gegebenen Schwingungsdauern bewirkten und zwar unter ersichtlicher Beeinflussung der molekularen Struktur des Phosphors, erscheinen danach bestimmend für die Art der Bindung oder Gruppierung, zu welcher die genannten wesentlichen Bestandteile der Zentren bei der Bereitung des Phosphors zusammentreten. Druck zerstört die als Zentren wirksamen Gruppierungen.

Jedes Zentrum muß dreier verschiedener, ineinander übergehender Zustände fähig sein und sie je nach der Temperatur annehmen, dabei aber unveränderlich seine Eigenschwingungsdauern beibehalten.

In bezug auf die Unveränderlichkeit der Schwingungsdauern und die Zugehörigkeit zum Metallatom sind Phosphoreszenzbanden und Spektralserien eines Metalles einander analog. Beide stellen Reihen möglicher Schwingungszustände des Metallatomes dar, von welchen aber in einem bestimmten Atom aufeinmal hier wie dort immer nur einer statt hat; je ein Zentrum kann nur eine Bande emittieren, wie auch nur eine Spektralserie von einem Atom auf einmal erscheint.* Gemeinsam ist es auch, daß die Auswahl dieses einen Zustandes durch Einflüsse chemischer Art bewirkt erscheint, nämlich durch die anderen Atome des Zentrums und deren Gruppierung im Falle der Phosphoreszenzbanden und durch die im elektrischen Bogen sowie sonst in Flammen schichtenweise verschiedene chemische Beschaffenheit der Umgebung im Falle der Spektralserien**. Ebenfalls gemeinsam ist hier wie dort die spektrale Verbreitung mit steigender Temperatur, sowie die Verminderung der Intensität durch gleichzeitiges Vorhandensein eines anderen Metalles, welche letzteren Analogien allerdings mehr indirekter Art zu sein scheinen.

---

* Lenard, Ann. d. Phys. 11, p. 636, 1903.

** Lenard, l. c., p. 649; De Watteville, Comptes Rend. 138, p. 346, 1904.

Nach dem über den Einfluß der Metallmenge Gefundenen können nur wenige Atome des Metalles in je einem Zentrum angenommen werden, ebenso aber auch nicht besonders viele Atome des Erdalkalis oder Schwefels*. Denn das Erdalkalisulfid eines Phosphors war ohne Beeinträchtigung oder Abänderung der Phosphoreszenzfähigkeit in sehr weitgehendem Maße ersetzbar durch mancherlei andere Substanz; es kann danach in seiner Hauptmenge nur als inaktives Füllmaterial gelten, welches weder bei der Aufnahme der Erregung noch bei deren Verausgabung beteiligt ist. Auch die Annahme, daß dieses Füllmaterial mit der Aufspeicherung der Erregung zu tun habe, findet keinen Anhalt; denn es kann beispielsweise in ein und demselben Phosphor eine bestimmte Bande sehr vollkommene Erregungsaufspeicherungen haben (unterer Momentanzustand) und gleichzeitig eine andere Bande unvollkommene Aufspeicherung (Dauerzustand). Danach scheint die große Menge inaktiven Füllmateriales nur den Zweck zu haben, die Bildung zu stark metallhaltiger, unwirksamer Atomgruppierungen bei der Herstellung des Phosphores zu verhindern.

Zur Frage, worin die Wirkung des erregenden Lichtes auf die Zentren bestehe, kann bemerkt werden, daß man gegenwärtig nur eine Wirkung von Licht auf Metall oder Metallsulfid kenne, welche in Betracht kommen könnte: Die lichtelektrische Wirkung, von welcher gezeigt ist**, daß sie in dem Austritt negativer Quanten aus den Metallatomen bestehe, wobei die Energie, soweit zu sehen, nicht dem erregenden Lichte, sondern dem Inneren des Metallatomes entstammt.*** Es mag dazu hervorgehoben werden, daß die Sulfide der von uns als wirksam konstatierten Metalle als Blenden und Glanze bekannt, der genannten Wirkung in hervorragendem Maße zugänglich sind† und daß durch Untersuchungen der Herren Elster und Geitel†† bereits seit langer

* Das Bestehen bestimmter Verhältnisse zwischen den Atomzahlen des Erdalkalis und des Metalles ist angezeigt durch die Tatsache, daß die maximal wirkenden Metallmengen mit wachsendem Atomgewicht des Erdalkalis abnehmen.

** Lenard, Sitzber. d. Wiener Akad. 108. IIa, p. 1649, 1899.

*** Lenard, Ann. d. Phys. 8, p. 170, 1902.

† Nach anderweitig zu veröffentlichenden Versuchen.

†† Elster und Geitel, Wied. Ann. 38, p. 507, 1899; 44, p. 722 u. ff., 1891;

Zeit tatsächliches Bestehen der lichtelektrischen Wirkung bei den Phosphoren, sowie auch bei anderen phosphoreszenzfähigen Substanzen außer Zweifel gesetzt ist.

Wenn die Erregung im Austritt von Quanten aus dem Metallatom besteht, kann der Verbrauch der Erregung Rückkehr dieser Quanten sein mit oszillatorischer Annährung an ihre ursprünglichen Bahnen in den Dynamiden des Atomes. Es fiele dann die Möglichkeit des Verbrauches von Erregung zusammen mit der Möglichkeit elektrischer Strömung innerhalb des vom Zentrum eingenommenen Raumes. Letztere Möglichkeit, die elektrische Leitfähigkeit in Körpern von der chemischen Beschaffenheit der Phosphore, hängt aber in der Tat im allgemeinen so mit der Temperatur zusammen, wie es den Eigenschaften der drei Temperaturzustände der Banden entspricht.

52, p. 453, 1894. — Diese Arbeiten haben uns, im obigem Zusammenhange, schon vor längerer Zeit zu weiteren Beobachtungen veranlaßt, über welche gesondert zu berichten sein wird.

2.

EINE NEUE METHODE ZUR QUANTITATIVEN BESTIMMUNG DES ÄTHYLALKOHOLS.

Von STEFAN BUGARSZKY.*

Vorgelegt der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung am 14. Dezember 1903.

Aus „Mathematikai és Természettudomanyi Értesitö" (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie) Bd. XXII, pp. 51—59.

Die zur quantitativen Bestimmung des Äthylalkohols bisher ausgearbeiteten Verfahren gründen sich alle auf die oxydierende Wirkung der Übermangansäure**, oder auf die der Chromsäure***. Ganz befriedigende Resultate liefert aber keines von diesen Verfahren†, da weder die Übermangansäure, noch die Chromsäure den Äthylalkohol glatt, d. h. nach einem einfachen, von den Konzentrationsverhältnissen unabhängigen stöchiometrischen Verhältnisse oxydiert, weshalb es auf Grund dieser Wirkung nur unter gewissen streng eingehaltenen Versuchsbedingungen gelingt, leidliche Resultate zu erhalten. Wenn aber sehr kleine

* Mitteilung aus dem chemischen Institute der tierärztlichen Hochschule zu Budapest.

** Röse: Zeitschr. f. angew. Chemie 1888, 31; Benedict und Norris: Journal Americ. Chem. Soc. *20*, 293 (1897).

*** Bourcart: Zeitschr. f. analyt. Chemie *29*, 609 (1890); Nicloux: Comptes rendus de la Soc. de biol. [10] *3*, 841 (1896); Bordas u. Raczkowski: Comptes rendus de la Acad. des sciences *123*, 1071 (1896); Kurilоff: Ber. d. deutsch. chem. Ges. *30*, 741 (1897).

† Vergl. die kritischen Bemerkungen von Benedict u. Norris: [Journal Americ. Chem. Soc. *20*, 293 (1897)], sowie Pozzi-Escot: [Annales Chim. anal. appl. *7*, 11 (1901)].

Mengen von Alkohol zu bestimmen sind, z. B. wenn der Alkoholgehalt des Wassers nicht mehr als einige Hundertstel-Prozente oder noch weniger beträgt, dann lassen sich die bisher ausgearbeiteten Methoden nicht anwenden. Darum suchte ich, als ich im Laufe anderweitiger Untersuchungen genötigt war, sehr kleine Mengen Alkohols in Wasser quantitativ zu bestimmen, nach einem derartigen analytischen Verfahren, welches die quantitative Bestimmung von Äthylalkohol auch für den Fall seiner sehr niedrigen Konzentration ermöglicht.

Es gelang mir die Lösung dieser Aufgabe dadurch, daß ich als Oxydationsmittel das *Brom* angewandt habe, wie dies meine weiter unten angeführten Versuche beweisen.

Es wurde beim ersten Versuche, bei dem eine Menge von 0,1135 g Alkohol in einem mit eingeriebenem Glasstöpsel versehenen Glaskolben in 50 ccm Wasser von der Temperatur 25° C. enthalten war, 0,5 ccm (= 1,6 g) reines Brom durch Anwendung von heftigem Schütteln möglichst schnell in Lösung gebracht. Die jodometrische Bestimmung des Bromgehaltes ergab gleich am Anfange der Wirkung das folgende Resultat: Es wurden bei der Titration von 1 ccm der Flüssigkeit 7,68 ccm $^1/_{20} - n$ Thiosulfatlösung verbraucht. Zwei Stunden später wurden auf 1 ccm des Reaktionsgemisches, das in einem OSTWALDschen Thermostat (konstante Temp. 25° C) stand, 7,18, nach 5 Stunden 6,64 und nach 24 Stunden 5,30 ccm $^1/_{20} - n$ Thiosulfatlösung verbraucht. Diese Daten beweisen, daß Brom und Äthylalkohol in verdünnter wässeriger Lösung bei gewöhnlicher Temperatur sehr langsam aufeinander wirken.

Die Reaktionsgeschwindigkeit steigt nun, wie die chemische Kinetik lehrt, sehr schnell mit der Temperatur, so daß Reaktionen, die bei gewöhnlicher Temperatur sehr langsam vor sich gehen, z. B. zu ihrem praktisch vollständigen Verlauf eine Zeitdauer von mehreren Wochen brauchen, in der Nähe von 100° C schon innerhalb einiger Stunden vollständig verlaufen können.* Als es mir deshalb die oben angeführten Versuchsresultate zeigten, daß die

* Vergl. z. B. VAN 'T HOFF: Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie, Heft 1, 223 (1898).

Oxydation durch Brom bei gewöhnlicher Temperatur infolge langsamen Verlaufs der Reaktion nicht vollständig ist, prüfte ich, ob die Reaktion bei viel höherer Temperatur, nämlich nicht weit von 100° C innerhalb weniger Stunden sich praktisch vollständig vollziehen wird. Zu dem Zwecke stellte ich das obige Reaktionsgemisch in heißes Wasser hinein, das in einem Zylinderglas stand und mit Hilfe der Flamme eines Bunsenbrenners erhitzt, auf der Temperatur von 80° C (± 5°) erhalten wurde. Nach zwei Stunden nahm ich den Kolben aus dem heißen Wasser heraus und nach Erkaltenlassen und tüchtigem Umschütteln des Reaktionsgemisches bestimmte ich den in 1 ccm der Flüssigkeit enthaltenen Bromgehalt. Es wurde bei der Titration 3,72 ccm $^1/_{20} - n$ Thiosulfatlösung verbraucht. Dann stellte ich das Reaktionsgemisch in das heiße Wasser zurück und hielt es eine Stunde lang darin. Nachdem ich es wieder herausgenommen hatte und erkalten ließ, bestimmte ich von neuem in 1 ccm des Gemisches den Bromgehalt. Es wurde 3,68 ccm $^1/_{20} - n$ Thiosulfatlösung verbraucht, was — mit Rücksicht auf die Flüchtigkeit des Broms — mit dem Werte 3,72 genügend übereinstimmt und beweist, daß die Reaktion in der Nähe von 80° C schon innerhalb zwei Stunden praktisch vollständig verläuft.

Um die Reaktionsgleichung aufstellen zu können, im Sinne welcher die Einwirkung zwischen Äthylalkohol und Brom, im Überschusse des letzteren vor sich geht, bestimmte ich vor allem in einem größeren Anteile des Reaktionsgemisches den Bromgehalt von neuem. Es wurde auf 5 ccm des Gemisches *18,30* ccm $^1/_{20} - n$ Thiosulfatlösung verbraucht. Dann bestimmte ich durch Titration mit $^1/_{10} - n$ Kalilauge, neben Anwendung von Phenolphtalein als Indikator, die gesamte Säure. Es wurde von der Lauge *12,42* aufgebracht. Andere 5 ccm der Reaktionsflüssigkeit setzte ich in einen ERLENMEYERschen Kolben, verdünnte sie mit 10 ccm Wasser und verjagte dann das Brom durch Erhitzen der Flüssigkeit. Nach dem Erkalten der letzteren, bestimmte ich in ihr den Bromwasserstoffgehalt mit Hilfe der Methode von VOLHARD. Es wurde *9,88* ccm $^1/_{10} - n$ Silbernitratlösung verbraucht. Alle diese Daten samt der Tatsache, daß die in 5 ccm der Flüssigkeit enthaltene Alkoholmenge gleich 0,01135 g und die in

5 ccm des Reaktionsgemisches ursprünglich vorhandene Brommenge $5 \cdot 7{,}63 = 38{,}50$ $^1/_{20} - n$ Thiosulfatlösung äquivalent war, beweisen — wie eine einfache Rechnung zeigt —: 1) daß zur Oxydation von 1 Mol Alkohol 2 Molen Brom verbraucht werden; 2) daß eine mit der verschwundenen Brommenge äquivalente Bromwasserstoffmenge gebildet wird und 3) daß gleichzeitig mit dem Bromwasserstoff auch eine andere Säure entsteht und zwar in einer solchen Menge, daß auf vier Äquivalente des Bromwasserstoffs ein Äquivalent dieser anderen Säure entfällt.

Alle diese experimentellen Daten berechtigen die Aufstellung folgender Reaktionsgleichung:

$$CH_3CH_2OH + H_2O + 2Br_2 = CH_3COOH + 4HBr$$

im Sinne welcher also ein Überfluß von Brom den Äthylalkohol in verdünnter wässeriger Lösung zur Essigsäure oxydiert.*

Es könnte auf Grund der vorigen Reaktionsgleichung die quantitative Bestimmung des Alkohols auf einem der drei folgenden Wege geschehen: 1) jodometrisch, in welchem Falle nämlich die Alkoholmenge aus der zur Oxydation aufgewandten Brommenge berechenbar wäre; 2) durch Bestimmung der gebildeten Bromwasserstoffmenge nach der Methode von VOLHARD; 3) acidimetrisch, nämlich (nach Entfernen des Broms) durch Titration der Flüssigkeit mit verdünnter Lauge von bekanntem Titer. Da aber bei dem jodometrischen Verfahren zufolge der Flüchtigkeit des Broms leicht ein Verlust entstehen kann, so ist es zweckmäßiger, den Alkoholgehalt entweder aus der mittels der Methode von VOLHARD bestimmten Bromwasserstoffmenge (indem 4 Molen Bromwasserstoff einem Mol Äthylalkohol entsprechen) zu berechnen, oder aber, die Berechnung auf Grund

* Obgleich die angeführten Versuchsdaten kaum bezweifeln lassen, daß das neben dem Bromwasserstoff entstehende Reaktionsprodukt Essigsäure ist, habe ich mich doch über die Identität der letzteren auch noch durch einen besonderen Versuch überzeugt. Ich stellte zu diesem Zwecke das Silbersalz der entstandenen organischen Säure dar und bestimmte in üblicher Weise (vergl. MAYER-JAKOBSON: Organische Chemie I, 324) den Silbergehalt der letzteren. Der Erhitzungsrückstand von 0,3585 g Substanz war 0,2730 g, was einem Gehalt von 64,98 % Silber entspricht, während der für das essigsaure Silber charakteristische Wert 64,67 % ist.

der Bestimmung der Säuremenge zu vollziehen, wobei man berücksichtigen muß, daß fünf Äquivalente entstehender Säure einem Mole Äthylalkohol entsprechen. Doch bei sehr niedrigem Alkoholgehalt liefert die Methode von VOLHARD genauere Resultate, als die acidimetrische, da die letztere bei größerer Verdünnung infolge der störenden Wirkung der Kohlensäurespuren fehlerhaft wird, während die Methode von VOLHARD auch für diesen Fall genaue Resultate liefert.

Bei direktem Sonnenlichte zersetzt bekanntlich Brom langsam das Wasser; bei diffusem Sonnenlicht und bei gewöhnlicher Temperatur geht diese Zersetzung so langsam vor sich, daß man den Umsatz nur nach mehreren Tagen sicher nachweisen kann. Bei höherer Temperatur aber, welche ich zwecks vollständiger Oxydation des Äthylalkohols anwenden mußte, könnte schon innerhalb zwei Stunden ein in Betracht zu ziehender Anteil von Brom zur Zersetzung von Wasser aufgebraucht werden. Zur Prüfung der Größenordnung dieser Fehlerquelle ließ ich das Brom in der Nähe von 80° C zwei Stunden lang in zwei verschiedenen Konzentrationen, nämlich in 0,2 *n* und 0.1 *n* Konzentration auf Wasser einwirken. Die Konzentration des entstandenen Bromwasserstoffs ergab sich in dem ersten Falle zu 0,00065 *n*, in dem zweiten zu 0,00029 *n*, der durch Nichtberücksichtigung dieses Umstandes begangene Fehler kann also, wenn man sich mit der Genauigkeit von einigen Zehntel-Prozenten begnügen kann, vernachlässigt werden.

Die Resultate meiner zur Prüfung der Methode ausgeführten Messungen sind in der weiter unten folgenden Tabelle zusammengestellt. Über die Einzelheiten des anzuwendenden Verfahrens sei das folgende erwähnt. Man setzt den aliquoten Teil der den Alkohol enthaltenden Flüssigkeit (nämlich so viel von der letzteren, daß der Alkoholgehalt nach dem Verdünnen mit Wasser auf 100 ccm unter 0,5 % bleibe) in einen Meßkolben von 100 ccm hinein und füllt nachher den Kolben mit destilliertem Wasser nahe (aber nicht ganz) bis zur Marke auf. Nun ist im Falle, daß der Alkoholgehalt — nach der vorgenommenen Verdünnung — niedriger als auf 0,05 % zu schätzen ist, 0,3 ccm Brom, wenn er mehr als 0,05, aber weniger als 0,25 % ist, 0,70 ccm und end-

lich, wenn er noch mehr als 0,25 % ist, 1,0 ccm Brom zuzusetzen. Nachdem das Brom durch energisches Schütteln in Lösung gegangen, stellen wir den Kolben ins Wasser von etwa 80° C hinein und belassen ihn darin etwa zwei Stunden lang. Nach zwei Stunden nehmen wir den Kolben aus dem heißen Wasser heraus, und nach dem Erkalten wird dem Reaktionsgemisch bis zur Marke des Kolbens Wasser zugesetzt. Nachher bestimmen wir im aliquoten Teile des Kolbeninhaltes — nach dem Verjagen des Broms durch Erhitzen — den Bromwasserstoffgehalt mit Hilfe der Methode von VOLHARD. Die Berechnung der Alkoholmenge geschieht auf dem Grunde, daß vier Molen Bromwasserstoff einem Mole Äthylalkohol entsprechen.

Nummer des Versuches	Alkoholgehalt in Prozenten	Die zur Oxydation von Alkohol angewandte Brommenge in ccm	Die zur Oxydation von Alkohol angewandte Brommenge in g	Volumen d. Reaktionsgemisches, worin d. Bromwasserstoffgehalt nach VOLHARD, bezw. der Säuregehalt titrimetrisch bestimmt wurde, in ccm	Die bei der Titration aufgebrauchte Menge von $^1/_{10}-n$ Silbernitratlösung in ccm	Die bei der Titration aufgebrauchte Menge von $^1/_{10}-n$ Kalilauge in ccm	Die in 100 ccm der Flüssigkeit *angewandte* Menge Äthylalkohols	Die mit Hilfe der Angaben des Feldes 5 der Tabelle *berechnete* Menge Äthylalkohols	Differenz zwischen der angewandten u. berechneten Menge	Differenz in Prozenten
1	0,1650	1,50	4,5	5,00	20,08	25,00	0,4600	0,4618	+0,0018	+0,39
2	0,2315	0,70	2,2	10,01	20,09	25,05	0,2300	0,2309	+0,0009	+0,39
3	0,1850	1,00	3,3	5,00	8,04	9,95	0,1840	0,1849	+0,0009	+0,48
4	0,1387	0,50	1,5	10,01	12,08	15,08	0,1380	0,1388	+0,0008	+0,58
5	0,0925	0,60	1,8	10,01	8,05	10,01	0,0920	0,0924	+0,0004	+0,43
6	0,0460	0,30	1,8	10,03	4,00	4,95	0,0460	0,0459	−0,0001	−0,21
7	0,0345	0,30	1,8	20,05	6,04	7,60	0,0345	0,0346	+0,0001	+0,29
8	0,0230	0,30	1,8	20,00	4,03	4,98	0,0230	0,0232	+0,0002	+0,87
9	0,0115	0,20	1,2	49,97	4,98	6,32	0,01150	0,01145	−0,00005	−0,43
10	0,0092	0,31	1,8	49,97	4,04	5,10	0,00920	0,00929	+0,00009	+0,97

Die Daten dieser Tabelle beweisen, daß man mit dem beschriebenen einfachen Verfahren den Alkoholgehalt zwischen den Grenzen 0,5—0,01 % mit genügender Genauigkeit bestimmen kann. Da dieser Methode (deren Reaktionsmechanismus ich übrigens zum Gegenstande einer besonderen Studie zu machen beabsichtige) ein nicht augenblicklich verlaufender Oxydationsvorgang zugrunde liegt, muß man bei Anwendung dieser Methode darauf

achten, daß Brom immer in einem genügend grossen Überschusse gegenwärtig sei und nicht nur in einer mit dem Alkohol äquivalenten, oder nur um ein wenig größeren Menge, denn im letzteren Falle könnte der Alkohol — innerhalb zwei Stunden — voraussichtlich nicht vollständig oxydiert werden. Es kann übrigens leicht erkannt werden, ob zur Oxydation des Alkohols eine genügende Menge angewandt wurde, da die Farbe des nach der zweistündigen Einwirkung noch verbleibenden Broms seine Konzentration roh zu schätzen ermöglicht. Schätzen wir sie (z. B. durch Vergleich der Farbe des Reaktionsgemisches mit der Farbe des Bromwassers von der Konzentration $^1/_{20} - n$) auf beinahe $^1/_{20} - n$, so ist zu der Oxydation eine genügende Brommenge angewendet worden.

3.

DIE BERECHNUNG SEISMISCHER ELEMENTE.

Von Dr. R. v. KÖVESLIGETHY
korr. Mitglied der Ung. Akademie der Wissenschaften.

Vorgelegt der ungarischen Akademie der Wissenchaften in der Sitzung am 12. Dezember 1904.

Die im April des Jahres 1904 erfolgte Gründung der internationalen Vereinigung für Erdbebenforschung läßt den lebhaften Wunsch nach einer physikalisch einwandfreien, daher auch allgemein annehmbaren Theorie zur Bestimmung der seismischen Elemente und hieraus der physikalischen Konstanten der Erdrinde aufkommen. Dieser Gedanke leitete mich bereits vor Jahren in meiner „Neuen geometrischen Theorie seismischer Erscheinungen“*, an deren Wesen ich nach meiner seither eingehenden Beschäftigung mit dem Gegenstande nichts zu ändern finde. Jedoch kann ich die Anerkennung, welche besonders SIEGMUND GÜNTHER** noch vor Erscheinen der deutschen Übersetzung meiner Abhandlung entgegenzubringen so freundlich war, durchaus nicht auf deren Formelmaterial beziehen, welches sich entgegen seiner mathematischen Eleganz zur schnellen und scharfen Durchrechnung mit wenigstelligen Logarithmen als ganz ungeeignet herausstellte.

Die Ursache hiervon liegt darin, daß sich die zu bestimmenden Elemente als Differenzen nahezu gleich großer Größen darstellen. Das in solchen Fällen nächstliegende Hilfsmittel einer Reihenentwicklung führt hier kaum zum Ziele, da die abgeleiteten

* Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. XIII. Bd. 418—464. 1897.
** Handbuch der Geophysik, II. Aufl. I. Bd. p. 472. Stuttgart 1897.

periodischen oder Potenzreihen nur in der Nähe des Epizentrums oder des seismischen Äquators eine, und auch hier nur beschränkte Konvergenz besitzen, wogegen größere Beben heute sozusagen auf der ganzen Erdoberfläche beobachtet werden können.

Endlich wies mir die Analogie des Problems mit der astronomischen Bahnbestimmung den rechten Weg, und nun stehen recht bequeme, für das mikro- und makroseismische Gebiet gleicherweise gültige geschlossene Formeln zu Gebote.

Die vorliegende Abhandlung enthält nur in weniger wesentlichen Punkten neue Resultate, ist aber eine notwendige Ergänzung meiner ersteren Arbeit. Und sowie Ungarn einer der ersten Staaten war, welcher der Association internationale sismologique beigetreten, so möchte ich auch wünschen, daß der folgende Vorschlag einheitlicher Berechnung von dieser Stelle aus der permanenten Kommission vorgelegt werde.

Der Vollständigkeit halber sei es mir erlaubt, die früheren Resultate, an die hier anzuknüpfen sein wird, kurz zu wiederholen. Die alten Bezeichnungen werden beibehalten werden, die in Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf die Gleichungen meiner ersten Abhandlung.

Zugleich spreche ich an dieser Stelle Herrn Dr. KARL JORDAN meinen besten Dank aus, der die Güte hatte, die nach Potenzen der Tiefe fortschreitenden Reihen zu kontrollieren, sie nach Bedarf über das dritte Glied hinaus zu entwickeln und hiernach die im Anhange stehenden Tabellen zu berechnen.

Geometrische Grundlage der Seismologie.

Betrachtet man die Erde als konzentrisch geschichtetes Mittel, in welchem die Dichtigkeit s in der in Einheiten des Erdradius ausgedrückten Entfernung ϱ vom Mittelpunkte durch das ROCHEsche Gesetz [12, 14, 17]

$$s = s_1 \frac{1 - \alpha\varrho^2}{1 - \alpha}$$

ausgedrückt werden kann, und läßt man für den Brechungsindex n die NEWTONsche Regel [11] gelten:

$$\frac{n^2 - 1}{s} = \frac{n_1^2 - 1}{s_1},$$

so wird mit leichter Reduktion [15, 16]

$$n^2 = \left(1 + \frac{\mu}{1-\alpha}\right)(1 - q\varrho^2), \tag{1}$$

wenn μ die brechende Kraft für Erdbebenstrahlen an der Erdoberfläche darstellt und

$$q = \frac{\alpha\mu}{1 + \mu - \alpha} \tag{2}$$

eine von dieser brechenden Kraft und von der Dichtigkeitszunahme nach innen abhängige Konstante bedeutet, welche wegen der für μ bestehenden natürlichen Grenzen $\infty > \mu \geqq 0$ an die Grenzen

$$\alpha > q \geqq 0, \text{ oder genügend nahe } \tfrac{3}{4} > q \geqq 0 \tag{3}$$

gebunden ist. In den vorangehenden Gleichungen bedeutet s_1 die Oberflächendichte der Erde, n_1 den Brechungsexponenten daselbst und α die ROCHEsche Konstante 0.764, statt welcher in manchen Fällen $\frac{3}{4}$ gesetzt werden mag.

In einem derart angeordneten Medium besteht die Gleichung [8] der astronomischen Refraktion

$$n\varrho \cos E = C = \text{Const.} \tag{4}$$

zu Rechte, in welcher E denjenigen Winkel bedeutet, unter welchem der Erdbebenstrahl die Oberfläche mit dem Kugelradius ϱ verläßt. An der Oberfläche der Erde kann dieser Winkel e, der Emersionswinkel, Gegenstand der unmittelbaren Beobachtung bilden, und es kann daher C [51] zweckmäßig durch

$$C = n_1 \cos e \tag{5}$$

ausgedrückt werden.

Drückt man (4) nach beiderseitiger Division mit $1 + \frac{\mu}{1-\alpha}$ in Form einer Differentialgleichung [9] aus, so hat man in

$$\frac{du}{d\varrho} = \frac{\sqrt{1-q}\cos e}{\varrho\sqrt{\varrho^2(1-q\varrho^2) - (1-q)\cos^2 e}} \tag{6}$$

die Polargleichung des Erdbebenstrahles. Die leichte Integration gibt [20, 51]

$$\varrho^2 = \frac{2(1-q)\cos^2 e}{1 + \sqrt{1 - 4q(1-q)\cos^2 e}\cos 2(u-\gamma)}, \tag{7}$$

worin der Polarwinkel u von der Erdbebenachse, d. h. von der

Epizentrum und Herd verbindenden Geraden aus gezählt wird und γ die Integrationskonstante darstellt.

Es wird bequemer sein, statt des Emersionswinkels e eine reduzierte Emersion einzuführen, die durch

$$\cos^2\eta = 4q(1-q)\cos^2 e \tag{8}$$

gegeben seine möge. Mit dieser wird dann einfacher

$$\varrho^2 = \frac{\cos^2\eta}{2q[1+\sin\eta\cos 2(u-\gamma)]}. \tag{9}$$

Der Erdbebenstrahl ist hiernach eine mit der Erde konzentrische Ellipse, welche durch den punktförmig angenommenen Herd geht und deren kleine Achse im Sinne der wachsenden Winkel mit der Bebenachse den Winkel γ einschließt (s. Fig. 1). Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt unserer weiteren Untersuchungen. Mit der üblichen Form der Ellipsengleichung verglichen, erhält man als Werte der großen und kleinen Achse sofort [22]:

$$a^2 = \frac{1}{2q}(1+\sin\eta), \quad b^2 = \frac{1}{2q}(1-\sin\eta), \tag{10}$$

und die durch γ bestimmte Orientierung würde sich aus der Überlegung ergeben, daß für den in der Polarachse liegenden Herd $u=0$, $\varrho=\varrho_0$ wird, wenn $1-\varrho_0$ die Tiefe des Herdes bedeutet.

Im Epizentrum wird e, daher auch η gleich 90^0, daher wegen dem in (3) gegebenen Werte von q auch $a>1$, oder die Bebenstrahlen treten an die Erdoberfläche. Von hier ab nimmt die halbe große Achse ab und kann je nach dem Werte von q von einem gewissen Epizentralabstande ab kleiner als Eins werden, so daß von hier ab kein Bebenstrahl mehr die Erde erreicht. Wie schön sich meine Erwartungen betreffs der anderweitigen Äußerung der so latent gewordenen Bebenenergie bewahrheitete, hatte ich an anderer Stelle Gelegenheit zu erwähnen.*

Der Emersionswinkel kann mit Hilfe der an der Erdoberfläche an den Bebenstrahl gelegten Tangente leicht bestimmt werden. Ist nämlich φ der Epizentralabstand einer Station, also

* A nagy földrengések energiája, Math. és Term. Értes. XXII. Köt. 146—159, deutsch: Die Erdbebenwarte, Laibach 1904; III. Jahrg. 196—202.

der Wert von u für die Erdoberfläche, und $1 - \varrho_0$, wie früher, die Tiefe des Herdes, so wird [52, 98]

$$\varrho_0^2\left[\cos^2(\varphi - e) + \frac{q}{1-q}\sin^2\varphi\right] = \cos^2 e. \qquad (11a)$$

Die Bebenstrahlen fangen an, an der Oberfläche unverspürt zu bleiben, wenn $a = 1$, oder was dasselbe besagt, wenn $e = 0$ wird. Unter dieser Voraussetzung ist aus (11) die Grenze Φ des Bebens durch [55]

$$\operatorname{tg}^2\Phi = \frac{(1-q)(1-\varrho_0^2)}{q(1+\varrho_0^2) - 1} \qquad (12)$$

gegeben.

Obgleich die Herdtiefe aus rein geometrischen Gründen selbst für ein räumlich ziemlich beschränktes Beben sehr bedeutend werden kann [39], wird sie doch in der Praxis kaum über 200 km liegen, so daß $\varrho_0 > 1 - \frac{1}{30}$ angenommen werden darf. Läßt man für den Moment die kleine Abweichung von der Einheit außer acht, so wird wegen des stets positiven Zählers Φ reell oder imaginär, je nachdem q größer oder kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Es ist daher

$$\left.\begin{array}{ll} \text{das Erdbeben räumlich beschränkt, wenn} & q > \frac{1}{2}, \\ \text{auf der ganzen Erde fühlbar, wenn} & q < \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Im ersten Falle ist das Beben gewöhnlich nur makroseismisch bemerkbar, im zweiten auch mikroseismisch.

In dem expliziten Ausdrucke der aus (11) ableitbaren Emersion

$$\operatorname{tg} e = \frac{\sqrt{1 - q - q\varrho_0^2 + q^2\varrho_0^2\cos^2\varphi} - (1-q)\varrho_0\cos\varphi}{\varrho_0\sin\varphi} \qquad (11b)$$

kommt dieselbe charakteristische Größe vor wie in (12). Die einfachste, zugleich rationale Form erhält die Emersion, wenn

$$q = \frac{1}{1+\varrho_0^2}$$

angenommen werden dürfte, da der in diesem Falle mit $\bar{e}$ zu bezeichnende Emersionswinkel

$$\operatorname{tg}\bar{e} = \frac{1-\varrho_0^2}{1+\varrho_0^2}\operatorname{cotg}\varphi$$

wird.

Aus Sprengungsversuchen, die jedoch, wie es auch die gewonnenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beweisen, als seismologische Experimente nicht maßgebend sind, kann mit einiger Wahrscheinlichkeit gefolgert werden, daß der Strahl eines an der Erdoberfläche selbst gelegenen Herdes aus dem Erdboden nicht heraustrete, oder daß für $\varrho_0 = 1$ beständig $e = 0$ ist, was immer auch φ sein möge. Unter dieser Bedingung folgt aus (11) in der Tat $q = \frac{1}{2}$, und daher, wenn noch bis zur ersten Potenz der Herdtiefe h entwickelt wird:

$$\operatorname{tg} \bar{e} = h \operatorname{cotg} \varphi,$$

welche Gleichung als eine überschlagsweise Schätzung der Emersion von Wert sein könnte.

Da nun die makroseismischen Beben in der Tat als Mikroseismen fast über die ganze Erde fühlbar sind, so muß nach (13) gefolgert werden, daß $q < \frac{1}{2}$ ist, was nach (2) besagt, daß der Brechungsexponent der Erdoberfläche für Bebenstrahlen

$$n_1 < 1 \cdot 2247$$

anzunehmen sein wird. Ist aber die Dichtigkeitszunahme der Erde nach innen regional eine andere, wie es wahrscheinlich unter dem Meeresboden der Fall sein mag, dann wird natürlich auch dieser Wert eine Änderung erleiden.

Eine leichte Überlegung zeigt, daß die Wurzel in (11b) stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist, daß daher zu φ und $180^0 - \varphi$ verschiedene Emersionen gehören und daß wegen des Wertes $1 - q(1 + \varrho_0^2)$ eine für die ganze Erde gültige, nach Potenzen von $1 - \varrho_0^2$ fortschreitende Reihenentwicklung von $\operatorname{tg} e$ nicht tunlich ist.

Es ist für das Folgende von Wichtigkeit zu bemerken, daß e je nach dem Werte von q zweierlei Minima hat. Ist $q > \frac{1}{2}$, so fällt dieses Minimum, $e = 0$, mit der schon in (12) gegebenen Grenze des Bebens zusammen. Ist jedoch $q < \frac{1}{2}$, so kommt das Minimum im Abstande Φ' vom Epizentrum zustande, wo

$$\operatorname{tg}^2 \Phi' = \frac{(1 - \varrho_0^2)(1 - q\varrho_0^2)}{\varrho_0^2(1 - q - q\varrho_0^2)} \qquad (14)$$

ist, und hat die Größe

$$\operatorname{tg}^2 e' = \frac{(1-\varrho_0^2)(1-q-q\varrho_0^2)}{\varrho_0^2(1-q\varrho_0^2)}. \tag{15}$$

Diese Resultate werden bei Untersuchung des seismischen Hodographen von Nutzen sein, da sich Φ' als Ort des Inflexionspunktes erweisen wird.

Schreibt man die Gleichung (4) für die durch den Herd gehende Kugel mit dem Radius ϱ_0 auf, so sieht man sogleich, daß der vom Herde horizontal ausgehende Strahl zum Inflexionspunkte des Hodographen führt. Geht allgemein der Strahl unter dem Winkel ε aus, so ist nach (4)

$$\varrho_0^2(1-q\varrho_0^2)\cos^2\varepsilon = (1-q)\cos^2 e,$$

und setzt man hierin aus (15) $e = e'$, so wird $\varepsilon = 0$.

Kennte man an verschiedenen Stationen den Emersionswinkel, so wäre die Berechnung der seismischen Elemente nach (11) ein Leichtes. Zur Zeit sind wir hiervon noch weit entfernt und können uns ausschließlich nur auf Zeitangaben stützen.

In einem auf der I. Straßburger Konferenz gehaltenen Vortrage* wies ich darauf hin, daß durch Beobachtungen des Polarsternes während eines Bebens der Reduktionsfaktor eines Horizontal- und Vertikalpendelpaares abgeleitet werden kann. Gibt z. B. ein Vicentinisches Pendelpaar die horizontale und vertikale Amplitude a_h und a_v, so ist der instrumentale Emersionswinkel

$$\operatorname{tg} e_0 = \frac{a_v}{a_h}, \tag{16}$$

der jedoch nur in demjenigen Falle mit dem wirklichen e identifiziert werden dürfte, als beide Pendel die Bewegung der Erdpartikelchen in genau gleicher Weise verzeichnen, was selbst bei sehr gedämpften Instrumenten nach mühsamer Reduktion kaum sicher verbürgt werden kann. Ist man aber imstande, aus den gut bekannten Elementen des Bebens die Emersion für die betreffende Station zu berechnen, so ist offenbar

$$c = \frac{\operatorname{tg} e}{\operatorname{tg} e_0} \tag{17a}$$

* Verhandlungen d. erst. internat. seismol. Konferenz, Leipzig 1902, 281—289.

der Reduktionsfaktor des Pendelpaares, der nun mit Hilfe der Gleichungen

$$\operatorname{tg} e = c \operatorname{tg} e_0, \quad \operatorname{tg} e_0 = \frac{a_v}{a_h} \tag{17b}$$

aus den Aufzeichnungen der Pendel die Emersion zu bestimmen gestattet. Für eine genauere Kenntnis der Herdtiefe wären solche Beobachtungen sehr erwünscht.

Vor der Hand sind wir noch ganz auf Zeitbeobachtungen angewiesen, und es muß daher die Fortpflanzung der Beben näher untersucht werden.

Bedeutet v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an der Erdoberfläche, $d\varsigma$ ein Bogenelement des Bebenstrahles, τ die Zwischenzeit, innerhalb welcher der Stoß vom Herde bis zum Beobachtungsorte gelangt, so hat man

$$v \frac{d\tau}{d\varsigma} = \frac{n}{n_1}, \tag{18}$$

und entnimmt man n und $d\varsigma$ aus (1) und (7), so folgt [58]:

$$\sqrt{1-q}\, v\tau = \int_{\varrho_0}^{1} \frac{(1-q\varrho^2)\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2(1-q\varrho^2) - (1-q)\cos^2 e}}. \tag{19}$$

Die leichte Integration liefert τ als Funktion des Emersionswinkels, was deshalb wichtig ist, als mehrere Beobachtungen die seismischen Elemente ohne Kenntnis des Epizentrums geben. Für Seebeben ist das von hohem Werte.

Rechnet man mit einer für ϱ_0 und q zu machenden Annahme die Werte

$$\frac{2q\varrho_0^2 - 1}{\sin\eta} = \sin X_0, \quad \frac{2q-1}{\sin\eta} = \sin X, \tag{20}$$

so wird (19)

$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\tau = \tfrac{1}{2}(X - X_0) + \sin\eta \sin\frac{X_0 - X}{2} \sin\frac{X_0 + X}{2},$$

wogegen die Addition der Gleichungen (20)

$$\sin\frac{X + X_0}{2} \cos\frac{X - X_0}{2} = \frac{q(1+\varrho_0^2) - 1}{\sin\eta}$$

gibt. Nach der Elimination von $\sin\frac{X+X_0}{2}$ aus beiden Gleichungen folgt

$$\sqrt{4q(1-q)}\,v\tau = \tfrac{1}{2}(X-X_0) + [1-q(1+\varrho_0^2)]\,\mathrm{tg}\frac{X-X_0}{2}, \quad (21)$$

welche später in etwas veränderter Form wiederkehrt, so daß wir uns jetzt mit deren Durchrechnung nicht zu beschäftigen brauchen.

Wird in der Gleichung (19) mit Hilfe von (6) u als unabhängige Variabele eingeführt, so gibt der Quotient beider Gleichungen

$$v\frac{d\tau}{du} = \frac{\varrho^2(1-q\varrho^2)}{(1-q)\cos e}. \quad (22)$$

Ganz beiläufig möge bemerkt werden, daß die Einführung der auf die Kugel vom Radius ϱ bezüglichen Emersion E zu der noch einfacheren Gleichung

$$v\frac{d\tau}{du} = \cos e \sec^2 E$$

führt.

Es möge nun eine neue Entfernungsangabe ω so bestimmt werden, daß

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,(u-\gamma), \quad (23)$$

oder mit Rücksicht auf (10)

$$\mathrm{tg}\,\omega = \sqrt{\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}}\,\mathrm{tg}\,(u-\gamma) \quad (24)$$

werde. Die geometrische Bedeutung von ω wird sich weiter unten leicht ergeben. Schreibt man jetzt

$$\cos 2(u-\gamma) = \frac{1-\mathrm{tg}^2(u-\gamma)}{1+\mathrm{tg}^2(u-\gamma)} \quad \text{und} \quad \cos^2\eta = (1-\sin\eta)(1+\sin\eta),$$

so wird die Gleichung (9) zunächst

$$\varrho^2 = \frac{(1-\sin\eta)[1+\mathrm{tg}^2(u-\gamma)]}{2q\left[1+\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}\,\mathrm{tg}^2(u-\gamma)\right]}, \quad (25)$$

und nach (24) sogleich

$$\varrho^2 = \frac{1}{2q}(1 - \sin\eta\cos 2\omega). \tag{26}$$

Aus (22) folgt weiter

$$v\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}}(1 + \sin\eta\cos 2\omega),$$

und hieraus durch Integration

$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\tau = \omega + \tfrac{1}{2}\sin\eta\sin 2\omega, \tag{27}$$

wo jedoch der Bedeutung von τ zufolge als untere und obere Grenze des Integrals jene ω-Werte zu nehmen sind, welche $u = 0$ und $u = \varphi$ entsprechen. Läßt man jedoch das Integral in der durch (27) gegebenen Form, so bedeutet τ, das nun zweckmäßiger mit einem anderen Buchstaben, ϑ, bezeichnet werden möge, offenbar die Zeit, unter welcher der Stoß vom Endpunkte der kleinen Achse bis zu dem Punkte gedrungen ist, dessen Lage durch ω gekennzeichnet ist. Die Richtigkeit des Gesagten erhellt daraus, daß die Bedingung $\omega = 0$ der Lage der kleinen Achse entspricht.

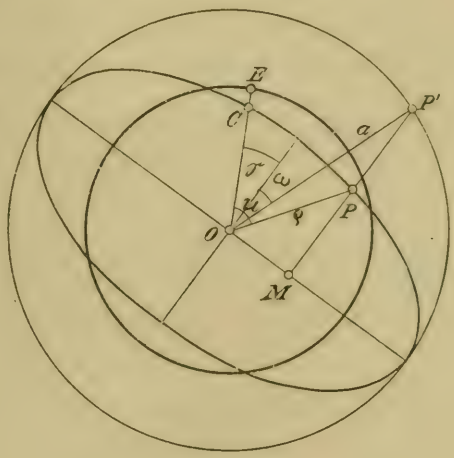


Fig. 1.

Die Gleichung (25) kann in der Form

$$y \equiv \varrho\cos(u-\gamma) = \sqrt{\frac{1-\sin\eta}{2q}}\cos\omega, \tag{28}$$

geschrieben werden und gibt mit (24) multipliziert

$$x \equiv \varrho\sin(u-\gamma) = \sqrt{\frac{1+\sin\eta}{2q}}\sin\omega. \tag{29}$$

x und y sind leicht ersichtlich die rechtwinkeligen Koordinaten eines Ellipsenpunktes P. Da die letzte Gleichung wegen (10) auch

$$x = a\sin\omega$$

geschrieben werden kann, so ersieht man, daß ω die Entfernung des auf den der Ellipse umschriebenen Kreis projizierten Punktes P' von der kleinen Achse, oder kurz die Amplitude des Punktes P bedeutet.

Wir wählen nun in der Ellipse zwei Punkte, deren Radien ϱ und ϱ', deren Entfernungen von der Bebenachse u, u' und deren Amplitude ω, ω' sein möge. Für den zweiten Punkt hat man nach (28) und (29) ähnlich:

$$y' \equiv \varrho' \cos(u' - \gamma) = \sqrt{\frac{1 - \sin\eta}{2q}} \cos\omega', \tag{28'}$$

$$x' \equiv \varrho' \sin(u' - \gamma) = \sqrt{\frac{1 + \sin\eta}{2q}} \sin\omega'. \tag{29'}$$

Die Kombinationen $yy' + xx'$ und $yy' - xx'$ der letzten vier Gleichungen geben

$$\left.\begin{aligned} \varrho\varrho' \cos(u' - u) &= \frac{1}{2q}[\cos(\omega' - \omega) - \sin\eta \cos(\omega' + \omega)], \\ \varrho\varrho' \cos(u' + u - 2\gamma) &= \frac{1}{2q}[\cos(\omega' + \omega) - \sin\eta \cos(\omega' - \omega)], \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

oder wenn die mit $\sin\eta$ multiplizierte zweite Gleichung zur ersten addiert wird:

$$\begin{aligned} &2q\varrho\varrho' \sin\eta \cos(u' + u - 2\gamma) \\ &= \cos^2\eta \cos(\omega' - \omega) - 2q\varrho\varrho' \cos(u' - u). \end{aligned} \tag{31}$$

Für dieselben beiden Ellipsenpunkte gilt nach (9):

$$2q[1 + \sin\eta \cos(2u - 2\gamma)] = \frac{\cos^2\eta}{\varrho^2},$$

$$2q[1 + \sin\eta \cos(2u' - 2\gamma)] = \frac{\cos^2\eta}{\varrho'^2},$$

deren Summe ist:

$$4q[1 + \sin\eta \cos(u' - u) \cos(u' + u - 2\gamma)] = \cos^2\eta \frac{\varrho^2 + \varrho'^2}{\varrho^2\varrho'^2}. \tag{32}$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und aus (31) $\cos(u' + u - 2\gamma)$, so erhält man den folgenden, nunmehr bloß Entfernungsunterschiede enthaltenden Ausdruck:

$$\frac{\cos^2\eta}{4q} = \frac{\varrho^2\varrho'^2 \sin^2(u' - u)}{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(u' - u) \cos(\omega' - \omega)}. \tag{33}$$

Eine zweite Relation ähnlichen Charakters ergibt sich aus den Gleichungen (26):

$$2q\varrho^2 = 1 - \sin\eta\cos 2\omega,$$
$$2q\varrho'^2 = 1 - \sin\eta\cos 2\omega',$$

deren Summe

$$q(\varrho^2 + \varrho'^2) = 1 - \sin\eta\cos(\omega' - \omega)\cos(\omega' + \omega) \qquad (34)$$

ist. Multipliziert man also die erste der Gleichungen (30) mit $2q\cos(\omega' - \omega)$ und subtrahiert das Produkt von (34), so kommt

$$\sin^2(\omega' - \omega) + 2q\varrho\varrho'\cos(u' - u)\cos(\omega' - \omega) = q(\varrho^2 + \varrho'^2), \qquad (35)$$

welche nur Entfernungsunterschiede enthält und zugleich auch von dem Emersionswinkel unabhängig ist.

Nun mögen in gleichem Sinne noch die Gleichungen (27)

$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\vartheta = \omega + \tfrac{1}{2}\sin\eta\sin 2\omega,$$
$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\vartheta' = \omega' + \tfrac{1}{2}\sin\eta\sin 2\omega'$$

transformiert werden. In ihrer Differenz bedeutet nun $\tau = \vartheta' - \vartheta$ offenbar die Zeitdauer, innerhalb deren der Stoß die Entfernung $u' - u$ durchmessen hat. Es wird also

$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\tau = \omega' - \omega + \sin\eta\sin(\omega' - \omega)\cos(\omega' + \omega). \qquad (36)$$

Zu dieser Gleichung fügen wir die erste Gleichung (30) hinzu, nachdem sie mit $2q\sin(\omega' - \omega)$ multipliziert wurde. Das Ergebnis ist

$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\tau = \omega' - \omega + \sin(\omega' - \omega)\cos(\omega' - \omega) - 2q\varrho\varrho'\sin(\omega' - \omega)\cos(u' - u), \qquad (37)$$

und wenn man (34) und (36) verbindet:

$$\sqrt{4q(1-q)}\, v\tau = \omega' - \omega + [1 - q(\varrho^2 + \varrho'^2)]\,\mathrm{tg}(\omega' - \omega), \qquad (38)$$

und alle diese Gleichungen sind von der Lage der kleinen Achse der Ellipse unabhängig.

Als die beiden Punkte der Ellipse, zwischen denen die Entfernungen $u' - u$ und $\omega' - \omega$ auftreten, werden zweckdienlich der Herd des Bebens $\varrho = \varrho_0$ und $u = 0$, und der Schnittpunkt der Ellipse mit der Erdoberfläche, $\varrho' = 1$, $u' = \varphi$ gewählt. Letzterer ist der Beobachtungsort, φ seine sphärische Distanz vom Epizentrum. Wir setzen nun

$$\omega' - \omega = \psi, \qquad (39)$$

nennen ψ die reduzierte Distanz und schreiben von nun an statt ϱ_0 kürzer ϱ; sodann erhalten wir den folgenden Satz von Gleichungen:

$$\sin^2\psi + 2q\varrho\cos\varphi\cos\psi = q(1+\varrho^2), \tag{40}$$

$$\sqrt{4q(1-q)}\,v\tau = \psi + \sin\psi\cos\psi - 2q\varrho\sin\psi\cos\varphi, \tag{41a}$$

$$\sqrt{4q(1-q)}\,v\tau = \psi + [1 - q(1+\varrho^2)]\operatorname{tg}\psi, \tag{41b}$$

und durch Verbindung von (33) und (35)

$$\cos\eta = 2q\varrho\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \tag{42a}$$

oder kraft der Bedeutung von η:

$$\cos e = \varrho\sqrt{\frac{q}{1-q}}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}. \tag{42b}$$

Soll jedoch e genau bestimmt werden, so muß noch eine andere Gleichung abgeleitet werden. Quadriert man die vorhergehende Gleichung und ersetzt in ihr $\sin^2\varphi$ aus (40), so kommt

$$\sin e = \frac{q(1-\varrho^2) + (1-2q)\sin^2\psi}{\sqrt{4q(1-q)}\sin\psi\cos\psi}, \tag{42c}$$

oder, da die entsprechenden Werte weiter unten ebenfalls vorkommen werden, für numerische Rechnung bequemer:

$$\sin e = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}}\{[1-q(1+\varrho^2)]\operatorname{tg}\psi + q(1-\varrho^2)\operatorname{cotg}\psi\}. \tag{42d}$$

Hier bedeutet τ die Zeit, innerhalb welcher das Beben von dem Herde bis zu dem Beobachtungsorte gelangt. Ist also t_h der Zeitpunkt, in welchem das Beben im Herde entstand, τ_0 die Zeitdauer, innerhalb deren es vom Herde zum Epizentrum gelangte, t_e die Beobachtungszeit im Epizentrum und t die Beobachtungszeit auf der seismischen Station, die Zeitpunkte sämtlich nach Greenwicher Zeit gemessen, so hat man

$$t_e = t_h + \tau_0 \quad \text{und} \quad t = t_h + \tau, \tag{43}$$

aus denen sofort

$$t = t_e + \tau - \tau_0 \tag{44}$$

folgt. Aus der Gleichung (40) erhält man für $\varphi = 0$: $\psi = \psi_0$ und hiermit nach (41) auch τ_0 (siehe (60) und (68)).

Es ist wichtig zu bemerken, daß sich aus (41a) sogleich die

Umlaufszeit um die Erde ergibt, wenn φ und ψ um 2π vermehrt werden. Man erhält hierfür

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{4q(1-q)}v}, \tag{45}$$

was immer auch die Tiefe des Herdes sein möge. Diese Zeit ist identisch mit der Umlaufszeit eines ganz in der Erde verbleibenden Strahles [72].* Der Umlauf einer Welle um die Erde ist heute bereits leicht verfolgbar, und so gewinnt diese auch von der Lage des Beobachtungsortes unabhängige Gleichung eine erhöhte Bedeutung für die Bestimmung von q und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Bevor auf die eigentliche Rechnung eingegangen wird, möge noch eine interessante Bemerkung gemacht werden. Setzt man eine Kurve fest, in welcher der Radiusvektor r durch

$$r^2 = \varrho^2(1 - q\varrho^2)$$

definiert ist, so bleibt laut der Gleichung (22) für die Bewegung des Stoßes der Flächensatz gültig. Die entsprechende Kurve kann dieser Bemerkung zufolge leicht konstruiert werden und lautet in rechtwinkeligen Koordinaten

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}(a^4x^2 + b^4y^2),$$

wenn die ursprünglich vorhandenen q und $\cos\eta$ durch (10) eliminiert werden. In dieser Kurve schreitet die Projektion des Stoßes so fort, daß die vom Radiusvektor überstrichenen Sektoren der Zeit proportional sind.

Die Gleichungen (21) und (41) sind als Integrale derselben Differentialgleichung natürlich identisch, worauf schon (20) und (26) hinweisen. Demnach ist

$$X - X_0 = 2\psi,$$

und so ist es in der Berechnung der Elemente von keinem wesentlichen Unterschiede, ob das Epizentrum bekannt oder unbekannt ist. Nur soll ψ in dem ersteren Falle aus (40), in dem letzteren aus (20) berechnet werden.

---

* In meiner ersten Abhandlung ist irrtümlich eine 2 als Faktor weggelassen.

Die numerische Herleitung der seismischen Elemente.

Die Auflösung der Gleichung (40)

$$\cos\psi = q\varrho\cos\varphi + \sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2) - q^2\varrho^2\sin^2\varphi} \qquad (46)$$

führt dieselbe Irrationalität ein, die auch in $\operatorname{tg} e$ auftrat. Die Wurzel ist stets mit positivem Zeichen zu nehmen, auch wenn φ im zweiten Quadranten liegt, wie dies aus (42b) folgt, darnach e für φ und $180^0 - \varphi$ verschieden zu sein hat. Auch kann nach (40) ψ nur in dem Falle 90^0 durchschreiten, wenn genau $q(1+\varrho^2) = 1$ wäre.

Ist aber das Beben überhaupt fühlbar, so ist nach (13) ψ reell, und es kann

$$\sin\varphi' = \frac{q\varrho}{\sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2)}}\sin\varphi \qquad (47a)$$

gesetzt werden, wo auch φ' stets reell bleibt. Für große φ subtrahiert man besser beide Seiten der vorangehenden Gleichung von 1 und erhält

$$\sin^2\left(45^0 - \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{1-\varkappa}{2} + \varkappa\sin^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right), \qquad (47b)$$

wo

$$\varkappa = \frac{q\varrho}{\sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2)}} \qquad (48)$$

gesetzt wurde.

Ist $\log\varkappa < 9\cdot 8$, so kann (47a), den Gebrauch vierstelliger Logarithmen voraussetzend, für jedes φ benutzt werden. (47b) dagegen ist allgemein gültig und gibt für große Entfernungen natürlich bessere Resultate als (47a), das besonders bei größeren $\varkappa$ nur im makroseismischen Gebiete benützt werden sollte.

Zur Berechnung von $\varkappa$ empfehlen sich nach den Potenzen der Herdtiefe fortschreitende Reihen. Man setze also

$$\varrho = 1 - h, \qquad (49)$$

und schreibe

$$\log\varkappa = \lg\frac{q}{1-q} - \varkappa_1, \qquad (50a)$$

worauf sich nach einer leichten Rechnung

$$\varkappa_1 = 0{,}4343\left\{\frac{1}{1-q}\,h - \frac{3q-1}{2(1-q)^2}\,h^2 + \frac{1-3q+6q^2}{3(1-q)^3}\,h^3 - \frac{10q^3-5q^2+4q-1}{4(1-q)^4}\,h^4 + \cdots\right\} \quad (50\text{b})$$

ergibt. Aus der im Anhange befindlichen Tafel kann in Einheiten der vierten Dezimalstelle sogleich $\varkappa_1$, d. h. die Korrektion entommen werden, welche von $\lg\frac{q}{1-q}$ abzuziehen ist, um $\log\varkappa$ zu geben.

Nimmt man, was aber sehr übertrieben ist, $h = \frac{1}{16}$, die Tiefe des Herdes also zu 400 km, und die Geschwindigkeit zu 3,38 km per Sekunde, also $v = 0{,}000\,5306$ Radien an, so folgt für $q = \frac{1}{2}$: $\frac{h^3}{v} = \frac{1}{2{,}2}$, $\frac{h^4}{v} = \frac{1}{35}$ Sekunde als Zeitfehler des Seismogramms. Da dieses kaum auf 10^s richtig ist und auch der Wert von h die Hälfte des angenommenen kaum überschreiten wird, so wird schon die Vernachlässigung des Gliedes $\frac{h^3}{v}$ kaum einen größeren Fehler als $\frac{1}{18}{}^s$ hervorbringen. Die Gleichung (50), und ebenso die noch folgenden Reihenentwicklungen haben also eine die gewöhnlichen Grenzen der Anwendung weit überschreitende Genauigkeit.

Aus der Gleichung (41a) folgt weiter für $q = \frac{1}{2}$ in ganz roher Annäherung

$$\Delta\tau = \frac{1}{v}\,\Delta\psi,$$

woraus ersichtlich, daß ψ auf $0^0.01$ genau bekannt sein muß, wenn die Zeitangabe nicht um mehr als $\frac{1}{3}{}^s$ falsch sein soll. Vierstellige Logarithmen genügen daher für die Berechnung seismischer Elemente durchaus.

Nun kann (46) in der Form

$$\cos\psi = q\varrho\cos\varphi + \sqrt{(1-q)\,(1-q\varrho^2)}\cos\varphi'$$

geschrieben werden, und wenn dies von $1 = (1-q\varrho) + q\varrho$ einmal subtrahiert, dann hierzu addiert wird, so folgt, indem man noch $q\varrho$ aus (47a) einführt,

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{\psi}{2} &= \frac{1-q\varrho}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2)}\,\frac{\cos\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi}{2}},\\ \cos^2\frac{\psi}{2} &= \frac{1-q\varrho}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2)}\,\frac{\sin\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}},\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

wobei sogleich in die Augen springt, daß die beiden Faktoren der rechten Seiten, nach Potenzen von h entwickelt, bis zum Gliede h^2 übereinstimmen. Setzt man daher

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2)}}{1-q\varrho}, \quad (52a)$$

oder

$$\varepsilon = \frac{q}{2(1-q)^2}h^2 - \frac{q^2}{(1-q)^3}h^3 + \frac{(12q+1)q^2}{8(1-q)^4}h^4 - \frac{(4q^2+1)q^3}{2(1-q)^5}h^5 + \cdots, \quad (52b)$$

so werden die Gleichungen (51)

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{\psi}{2} &= \frac{1-q\varrho}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi'}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)\right],\\ \cos^2\frac{\psi}{2} &= \frac{1-q\varrho}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)\right],\end{aligned}\right\} \quad (53a)$$

und deren Quotient

$$\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2}\,\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}\dfrac{\cos\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi'}{2}}}{1-\frac{\varepsilon}{2}\dfrac{\sin\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'}{2}}}. \quad (53b)$$

Schreibt man nun

$$\eta = \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}\dfrac{\cos\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi'}{2}}}{1-\frac{\varepsilon}{2}\dfrac{\sin\left(\varphi'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'}{2}}}, \quad (54)$$

so kann logarithmisch

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}\left[\lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2}\right] + \eta \qquad (55)$$

angesetzt werden. Beträgt die Distanz vom Epizentrum mehr als 10^0, so macht die Korrektion η nurmehr etliche Einheiten der vierten Dezimale aus und nimmt mit wachsendem Abstande ausnehmend rasch ab. Die Formel ist daher unter Zuhilfenahme der im Anhange gegebenen Korrektionstafel außerordentlich bequem.

Dr. JORDAN macht noch nachträglich die treffende Bemerkung, daß die Korrektion η unmittelbar auch auf φ' übertragen werden könne. Schreibt man in (53b) $\frac{\varphi'}{2} + \frac{\varphi + \varphi'}{2}$ an Stelle von $\varphi' + \frac{\varphi}{2}$, und setzt

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \cot \frac{\varphi + \varphi'}{2}, \qquad (54a)$$

so wird einfach

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi'}{2} + \delta\right). \qquad (55)$$

Die an $\frac{\varphi'}{2}$ anzubringende Korrektion δ selbst wird unmittelbar aus

$$\delta = \frac{180^0}{\pi}\left\{\frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \cot \frac{\varphi + \varphi'}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}\right)^3 \cot^3 \frac{\varphi + \varphi'}{2} + \cdots\right\} \qquad (54b)$$

berechnet. Wünscht man jedoch die Gleichung (55) beizubehalten, die meiner Ansicht nach für numerische Rechnung noch etwas bequemer ist, so findet sich η aus

$$\eta = 0{,}4343\left[\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi'} - \cos \varphi' \left(\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi'}\right)^2 + \frac{1}{6}(3 \cos 2\varphi' + 5)\left(\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi'}\right)^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}(\cos 3\varphi' + 7 \cos \varphi')\left(\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi'}\right)^4 + \cdots\right] \qquad (54c)$$

Wie man leicht sieht, ist dies die Reihenentwicklung von

$$\eta = \frac{1}{2} \log \left[\frac{1 + \operatorname{tg} \delta \cot \frac{\varphi'}{2}}{1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2}}\right].$$

Sowohl die Reihe für δ, als für η konvergiert so rasch, daß schon für einige Grade Entfernung vom Epizentrum das erste Glied vollkommen ausreicht.

Nahe zum Epizentrum, also in dem eigentlich makroseismischen Gebiete, ist die Formel (53a) vorzuziehen; da φ hier selbst klein ist, muß ε auf vier bedeutsame Stellen berechnet werden.

Nach einer von Dr. JORDAN gemachten Bemerkung kann man aber im makroseismischen Gebiete, ohne erst φ' berechnen zu müssen, bequemer vorgehen.

Entwickelt man unter Beibehaltung der Bezeichnung (48) in Gleichung (46) sowohl die Wurzel als den Kosinus nach Potenzen von $\sin^2\varphi$, so kommt:

$$\cos\psi = \frac{1+\varkappa}{\varkappa} q\varrho \left\{1 - \frac{1}{2}\varkappa\sin^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varkappa\frac{1+\varkappa^3}{1+\varkappa}\sin^4\varphi - \cdots\right\},$$

und von der Einheit subtrahiert mit Berücksichtigung, daß

$$\frac{1+\varkappa}{\varkappa} q\varrho = \cos\psi_0$$

wird:

$$\sin^2\frac{\psi}{2} = \sin^2\frac{\psi_0}{2} + \frac{\varkappa}{4}\cos\psi_0\sin^2\varphi\left\{1 + \frac{1}{4}\frac{1+\varkappa^3}{1+\varkappa}\sin^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\frac{1+\varkappa^5}{1+\varkappa}\sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\frac{1+\varkappa^7}{1+\varkappa}\sin^6\varphi + \cdots\right\} \qquad (53c)$$

wo der Wert von $\sin^4\frac{\psi_0}{2}$ unmittelbar aus (60b) entnommen werden kann.

Würde man in der Gleichung für $\cos\psi$ mit Hilfe von (47a) statt $q\varrho$ die Irrationalität eliminieren, so käme

$$\cos\psi = q\varrho\,\frac{\sin(\varphi'+\varphi)}{\sin\varphi'},$$

welche Formel aber keine besonderen Vorteile gewährt.

Der Gang der numerischen Rechnung ist nun folgender: Aus einer vorläufigen Untersuchung über das Beben ist die geographische Lage des Epizentrums, die Zeit des ersten Stoßes, die Tiefe des Herdes und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in roher Annäherung meist bekannt. Sollte dies nicht der Fall sein, so lassen sich solche Näherungen leicht finden, und zudem mag v für die erste Phase zu 12 km per Sekunde, also $v = 0{,}113\,\frac{\text{rad}}{\text{min}}$

angenommen werden. Für die übrigen Phasen kann $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ dieser Geschwindigkeit gewählt werden. h wird man einer Tiefe von 100 km entsprechend bei tektonischen Beben 0,0157 und q entsprechend der in (13) gegebenen Regel in der Nähe von 0,5 ansetzen können.

Mit diesen angenommenen Werten wird für äquidistante Epizentralabstände φ eine seismische Ephemeride gerechnet. Im mikroseismischen Gebiete ist ein Intervall von 10^0 für φ noch genügend eng, für das makroseismische Gebiet bei der Bearbeitung naher Beben muß jedoch φ in bedeutend engeren Grenzen genommen werden.

Für die gewählten äquidistanten φ wird zunächst nach (47a) oder (47b) die Hilfsdistanz φ', hierauf nach (53a), (53c) oder (55) die reduzierte Distanz ψ berechnet. (41b), (68a) und (68b) gibt nun τ und τ_0, endlich (44) die Ephemeride, d. h. die Zeiten, in welchen auf den gleichmäßig verteilten Stationen das Eintreffen des Bebens oder irgend einer Phase desselben der Rechnung nach beobachtet werden sollte.

Der regelmäßige Gang der Differenzen gibt eine durchaus genügende Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung, und im mikroseismischen Gebiete kann die Zeit bei einem 10^0-Intervalle für den Abstand φ der tatsächlichen Stationen sogar linear interpoliert werden. Der Zeitunterschied im Sinne

$$\text{Beobachtung} - \text{Rechnung} = \Delta t \tag{56}$$

liefert die Grundlage zur Verbesserung der angenommenen Elemente mit Hilfe der weiter unten abzuleitenden Fehlergleichung.

Die epizentralen Koordinaten der Beobachtungsstationen.

Auf dieser Stufe der Rechnung ist bereits die Kenntnis der epizentralen Distanz der einzelnen Stationen erforderlich. Ist die geographische Breite und Länge des Epizentrums b_0 und l_0, die entsprechenden Größen für die Station b und l, so werde, falls $\varphi < 90^0$ ist,

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\cos b \cos b_0}\, \frac{\sin \frac{l - l_0}{2}}{\sin \frac{b - b_0}{2}} \tag{57a}$$

gesetzt, worauf φ durch

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{b - b_0}{2} \sec x \tag{57b}$$

gegeben ist. Wäre dagegen φ zwischen 90^0 und 180^0 gelegen, so berechne man

$$\sin y = \sqrt{\cos b \cos b_0}\, \frac{\sin \frac{l - l_0}{2}}{\cos \frac{b - b_0}{2}} \tag{57c}$$

und hieraus

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{b - b_0}{2} \cos y. \tag{57d}$$

Will man jedoch mit Hilfe von Zeitangaben auch die Lage des Epizentrums verbessern, dann ist auch die Kenntnis des Azimuts der einzelnen Stationen in Bezug auf das Epizentrum notwendig. Bezeichnet man dieses von N über E gezählt mit a, und bedeutet c das Azimut des Epizentrums aus den einzelnen Stationen, das übrigens nur die Rolle eines Hilfswinkels spielt, so hat man in diesem Falle bequemer aus den GAUSSschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &\equiv \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{c - a}{2} = \sin \frac{b - b_0}{2} \cos \frac{l - l_0}{2}, \\ \mathrm{II} &\equiv \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{c - a}{2} = \cos \frac{b + b_0}{2} \sin \frac{l - l_0}{2}, \\ \mathrm{III} &\equiv \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{c + a}{2} = \cos \frac{b - b_0}{2} \cos \frac{l - l_0}{2}, \\ \mathrm{IV} &\equiv \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{c + a}{2} = \sin \frac{b + b_0}{2} \sin \frac{l - l_0}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{57e}$$

aus welchen

$$\operatorname{tg} \frac{c + a}{2} = \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{IV}}, \quad \operatorname{tg} \frac{c - a}{2} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}},$$

und (57d)

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \frac{c + a}{2}}{\sin \frac{c - a}{2}} \operatorname{tg} \frac{b - b_0}{2} = \frac{\cos \frac{c + a}{2}}{\cos \frac{c - a}{2}} \operatorname{cotg} \frac{b + b_0}{2}$$

folgt. Über die Wahl der Quadranten für a kann kein Zweifel

bestehen, und zur Berechnung von φ wird die erste oder zweite Gleichung genommen, je nachdem $\frac{c-a}{2} \gtrless 45^0$ ist.

Die Lage des Epizentrums endlich kann mit genügender Annäherung aus dem Seismogramme dreier Stationen bestimmt werden. Bedeuten* x, y, z und x_0, y_0, z_0 die rechtwinkligen Koordinaten einer Station und des Epizentrums, also

$$\begin{aligned} x &= \cos b \cos l, & x_0 &= \cos b_0 \cos l_0, \\ y &= \cos b \sin l, & y_0 &= \cos b_0 \sin l_0, \\ z &= \sin b, & z_0 &= \sin b_0, \end{aligned}$$

so hat man

$$\cos \varphi = x x_0 + y y_0 + z z_0 .$$

Anderseits zeigte nun OMORI**, daß φ aus der in Sekunden ausgedrückten Dauer Θ der Einleitungsphase des Seismogramms nach der auch theoretisch herleitbaren Formel

$$\varphi = 0^0{,}06531\, \Theta + 0^0{,}3414$$

bestimmt werden kann. Ist nun das Seismogramm dreier Stationen gegeben, so gibt die Auflösung der obigen Gleichung x_0, y_0, z_0, und hieraus mit

$$\operatorname{tg} l_0 = \frac{y_0}{x_0}, \quad \operatorname{tg} b_0 = \frac{z_0}{x_0} \cos l_0 = \frac{z_0}{y_0} \sin l_0$$

die Lage des Epizentrums. Als Quadrant von l_0 ist derjenige zu wählen, in welchem $\sin l_0$ mit y_0, $\cos l_0$ mit x_0 gleich bezeichnet ist.

Die seismische Fehlergleichung.

Wird in Gleichung (41a) eine jede Größe als veränderlich und ihre Inkremente als Größen erster Ordnung angesehen, deren Quadrate und gegenseitige Produkte vernachlässigt werden können, so erhält man

$$2\cos\psi(\cos\psi - q\varrho\cos\varphi)\Delta\psi - \left[\frac{2(1-2q)}{\sqrt{4q(1-q)}}\, v\tau + 2\varrho\cos\varphi\sin\psi\right]\Delta q -$$
$$-2q\sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varrho + 2q\varrho\sin\psi\sin\varphi\,\Delta\varphi - \sqrt{4q(1-q)}(v\Delta\tau + \tau\Delta v) = 0.$$

*) W. LÁSKA, Über die Berechnung der Fernbeben, Nr. XIV der neuen Folge d. Mitteil. d. Erdbebenkomm. d. K. Ak. d. Wiss. Wien 1903.

**) Publications of the Earthquake Invest. Comm. No. 13. Tokyo. 1903.

Ähnlich ergibt sich aus (40):

$$2(\cos\psi - q\varrho\cos\varphi)\sin\psi\,\Delta\psi + (2\varrho\cos\varphi\cos\psi - 1 - \varrho^2)\Delta q + \\ + 2q(\cos\varphi\cos\psi - \varrho)\Delta\varrho - 2q\varrho\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\varphi = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $-\sin\psi$, die zweite mit $\cos\psi$, und addiert, so kommt

$$\left[2\varrho\cos\varphi - \cos\psi - \varrho^2\cos\psi + \frac{2(1-2q)v\tau}{\sqrt{4q(1-q)}}\sin\psi\right]\Delta q + \\ + 2q(\cos\varphi - \varrho\cos\psi)\Delta\varrho - 2q\varrho\sin\varphi\,\Delta\varphi + \\ + \sqrt{4q(1-q)}\,(v\,\Delta\tau + \tau\,\Delta v)\sin\psi = 0,$$

eine Gleichung, welche nun von $\Delta\psi$ befreit erscheint.

Der Koeffizient von Δq kann noch bedeutend vereinfacht werden. Führt man aus (40) den Wert von $1+\varrho^2$, aus (41a) von $v\tau$ ein, so folgt

$$\frac{2}{4q(1-q)}[4q(1-q)\varrho\cos\varphi - \sin^2\psi\cos\psi - 2q\varrho\cos\varphi(1-2q+\cos^2\psi) + \\ + (1-2q)\psi\sin\psi],$$

und wird unter der Klammer die aus (40) folgende Gleichung

$$\sin^2\psi\cos\psi + 2q\varrho\cos^2\psi\cos\varphi - q(1+\varrho^2)\cos\psi = 0$$

addiert, so hat man

$$\text{Coeff. } \Delta q = \frac{2}{4q(1-q)}[2q\varrho\cos\varphi + (1-2q)\psi\sin\psi - q(1+\varrho^2)\cos\psi].$$

Das vollständige Differential ist mithin

$$\frac{2}{4q(1-q)}[2q\varrho\cos\varphi + (1-2q)\psi\sin\psi - q(1+\varrho^2)\cos\psi]\Delta q + \\ + 2q(\cos\varphi - \varrho\cos\psi)\Delta\varrho - 2q\varrho\sin\varphi\,\Delta\varphi + \\ + \sqrt{4q(1-q)}\sin\psi\,(\tau\,\Delta v + v\,\Delta\tau) = 0, \qquad (58\,a)$$

in dem jedoch laut (44) noch $\Delta\tau$ durch

$$\Delta\tau = \Delta t - \Delta t_e + \Delta\tau_0$$

zu ersetzen ist.

$\Delta\tau_0$ ergibt sich aber aus (58a), wenn hierin $\varphi = 0$ und demgemäß auch $\psi = \psi_0$ gesetzt wird. Das Ergebnis ist

$$\frac{2}{4q(1-q)}[2q\varrho + (1-2q)\psi_0\sin\psi_0 - q(1+\varrho^2)\cos\psi_0]\Delta q + \\ + 2q(1-\varrho\cos\psi_0)\Delta\varrho + \sqrt{4q(1-q)}\sin\psi_0(\tau_0\Delta v + v\Delta\tau_0) = 0. \qquad (58\,b)$$

Wird nun die erste Gleichung mit $\sin\psi_0$, die zweite mit $-\sin\psi$ multipliziert und werden beide addiert, sonach mit $\sin\psi\sin\psi_0$ durchdividiert, so erhält man

$$\sqrt{4q(1-q)}\,[(t-t_e)\Delta v + v\Delta t - v\Delta t_e] +$$
$$+\frac{2}{4q(1-q)}\Big[(1-2q)(\psi-\psi_0) + \frac{2q\varrho\cos\varphi - q(1+\varrho^2)\cos\psi}{\sin\psi} -$$
$$-\frac{2q\varrho - q(1+\varrho^2)\cos\psi_0}{\sin\psi_0}\Big]\Delta q +$$
$$+2q\Big[\frac{\cos\varphi-\varrho\cos\psi}{\sin\psi} - \frac{1-\varrho\cos\psi_0}{\sin\psi_0}\Big]\Delta\varrho - 2q\varrho\,\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\Delta\varphi = 0. \quad (59)$$

worin nach (44) die Differenz $\tau-\tau_0$ durch das bekannte $t-t_e$ ersetzt wurde. In diesen Gleichungen ist endlich nach (46):

$$\cos\psi_0 = q\varrho + \sqrt{(1-q)(1-q\varrho^2)}, \quad (60a)$$

oder indem man nach Potenzen von h entwickelt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\psi_0 &= 1 - \frac{q}{2(1-q)}h^2 + \frac{q^2}{2(1-q)^2}h^3 - \frac{1+4q}{8(1-q)^3}q^2h^4 + \\
&\quad + \frac{q^3(3+4q)}{8(1-q)^4}h^5 - \cdots, \\
\psi_0 &= \sqrt{\frac{q}{1-q}}\Big[h - \frac{q}{2(1-q)}h^2 + \frac{q(1+2q)}{6(1-q)^2}h^3 - \frac{q^2(3+2q)}{8(1-q)^3}h^4 + \\
&\quad + \frac{(3+24q+8q^2)q^2}{40(1-q)^4}h^5 - \cdots\Big], \\
\sin\psi_0 &= \sqrt{\frac{q}{1-q}}\Big[h - \frac{q}{2(1-q)}h^2 + \frac{q^2}{2(1-q)^2}h^3 - \frac{q^2(1+4q)}{8(1-q)^3}h^4 + \\
&\quad + \frac{q^3(3+4q)}{8(1-q)^4}h^5 - \cdots\Big], \\
\operatorname{tg}\psi_0 &= \sqrt{\frac{q}{1-q}}\Big[h - \frac{q}{2(1-q)}h^2 + \frac{q}{2(1-q)^2}h^3 - \frac{q^2(7-2q)}{8(1-q)^3}h^4 + \\
&\quad + \frac{q^2(3+6q-2q^2)}{8(1-q)^4}h^5 - \cdots\Big],
\end{aligned}\right\} \quad (60b)$$

Die Fehlergleichung ist jedoch in der hier gefundenen Form des kleinen Divisors $\sin\psi_0$ halber für numerische Rechnungen nicht anwendbar, und außerdem ist erwünscht, daß φ eliminiert werde, also nur eine einzige Entfernungsangabe auftrete.

Subtrahiert man von der Gleichung (40) beiderseits

$$q(1+\varrho^2)\cos^2\psi,$$

so bleibt

$$\frac{2q\varrho\cos\varphi - q(1+\varrho^2)\cos\psi}{\sin\psi} = -[1-q(1+\varrho^2)]\operatorname{tg}\psi, \quad (61\,\text{a})$$

und für $\varphi = 0$

$$\frac{2q\varrho - q(1+\varrho^2)\cos\psi_0}{\sin\psi_0} = -[1-q(1+\varrho^2)]\operatorname{tg}\psi_0, \quad (61\,\text{b})$$

womit der erste Teil der genannten Transformation erledigt ist. Den obigen Reihen zufolge kann (61 b) endlich noch

$$\frac{2q\varrho - q(1+\varrho^2)\cos\psi_0}{\sin\psi_0} = -\sqrt{\frac{q}{1-q}}\Big[(1-2q)h + \frac{(3-2q)q}{2(1-q)}h^2 - \\ - \frac{q}{2(1-q)^2}h^3 + \frac{5q^2}{8(1-q)^3}h^4 - \frac{q^2(1+6q)}{8(1-q)^4}h^5 + \cdots\Big] \quad (61\,\text{c})$$

geschrieben werden.

Wird von der Gleichung (40) beiderseits $2q\varrho^2\cos^2\psi$ subtrahiert, so bleibt

$$\frac{\cos\varphi - \varrho\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{q(1-\varrho^2)}{2q\varrho}\cot\psi - \frac{1-q(1+\varrho^2)}{2q\varrho}\operatorname{tg}\psi, \quad (62\,\text{a})$$

das zwar von φ befreit erscheint, für $\psi = \psi_0$ aber immerhin noch nicht anwendbar ist. In dem Falle $\varphi = 0$ gibt jedoch (40) unmittelbar

$$\frac{1-\varrho\cos\psi_0}{\sin\psi_0} = \frac{1-\varrho^2}{2\sin\psi_0} + \frac{\sin\psi_0}{2q}, \quad (62\,\text{b})$$

wo nur das erste Glied rechter Hand umzuformen ist, um in der Reihenentwicklung für $\sin\psi_0$ kein bereits entwickeltes Glied zu verlieren.

Nun erhält man aber durch Subtraktion der beiden Gleichungen des Radiusvektors, welche zur Herleitung von (34) dienten, nachdem $\varrho' = 1$, $\omega' - \omega = \psi$ gesetzt wurde:

$$\frac{q(1-\varrho^2)}{\sin\psi} = \sin\eta\sin(\omega'+\omega),$$

während die erste Gleichung in (30)

$$\cos\psi - 2q\varrho\cos\varphi = \sin\eta\cos(\omega'+\omega)$$

geschrieben werden kann. Quadriert man beide Ausdrücke und eliminiert aus deren Summe $\cos^2\eta$ mit Hilfe von (42 a), so kommt

$$q^2\frac{(1-\varrho^2)^2}{\sin^2\psi} = 1 - 4q^2\varrho^2\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi} - (\cos\psi - 2q\varrho\cos\varphi)^2,$$

was für $\varphi = 0$ einfacher

$$q^2 \frac{(1-\varrho^2)^2}{\sin^2 \psi_0} = \sin^2 \psi_0 + 4q\varrho \cos \psi_0 - 4q^2\varrho^2$$

gibt. Vergleicht man dies mit (40) für den Fall $\varphi = 0$:

$$\sin^2 \psi_0 + 2q\varrho \cos \psi_0 = q(1+\varrho^2),$$

so erhält man schließlich

$$q^2 \frac{(1-\varrho^2)^2}{\sin^2 \psi_0} = q[2\varrho \cos \psi_0 + 1 + \varrho^2 - 4q\varrho^2], \qquad (62\,\mathrm{c})$$

und hieraus leitet man unschwer die Reihe

$$\frac{1-\varrho^2}{\sin \psi_0} = 2\sqrt{\frac{1-q}{q}}\left[1 + \frac{2q-1}{2(1-q)}h - \frac{q}{4(1-q)^2}h^2 + \frac{q^2}{4(1-q)^3}h^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{q^2(1+4q)}{16(1-q)^4}h^4 + \frac{q^3(3+4q)}{16(1-q)^5}h^5 - \cdots\right] \qquad (62\,\mathrm{d})$$

ab. Nun lautet die Entwicklung für (62 b)

$$\frac{1-\varrho\cos\psi_0}{\sin\psi_0} = \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}}\left[2(1-q) + 2qh - \frac{q}{1-q}h^2 + \frac{q^2}{(1-q)^2}h^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{q^2(1+4q)}{4(1-q)^3}h^4 + \frac{q^3(3+4q)}{4(1-q)^4}h^5 - \cdots\right] \qquad (62\,\mathrm{e})$$

Die Ausdrücke (61 a, c), (62 a, e) und der aus (42 b) zu entnehmende Faktor von $\Delta\varphi$ müssen nun in die Gleichung (59) eingestellt werden; man erhält

$$\sqrt{4q(1-q)}\,[(t-t_c)\Delta v + v\Delta t - v\Delta t_c] +$$
$$+ \frac{2}{4q(1-q)}\left\{(1-2q)(\psi-\psi_0) - [1-q(1+\varrho^2)]\operatorname{tg}\psi + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{q}{1-q}}\left[(1-2q)h + \frac{3-2q}{2(1-q)}qh^2 - \frac{q}{2(1-q)^2}h^3 + \cdots\right]\right\}\Delta q +$$
$$+ 2q\left\{\frac{q(1-\varrho^2)}{2q\varrho}\cot\psi - \frac{1-q(1+\varrho^2)}{2q\varrho}\operatorname{tg}\psi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}}\left[2(1-q) + 2qh - \frac{q}{1-q}h^2 + \frac{q^2}{(1-q)^2}h^3 - \cdots\right]\right\}\Delta\varrho -$$
$$- \sqrt{4q(1-q)}\cos c\,\Delta\varphi = 0. \qquad (63)$$

Aus dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Pole, dem Epizentrum und der Beobachtungsstation folgt, wenn die Verbesserung der geographischen Breite und Länge des Epizentrums mit Δb und Δl bezeichnet wird:

$$\Delta\dot{\varphi} = -\cos a\,\Delta b - \sin a \cos b_0\,\Delta l, \qquad (64)$$

wo der Wert des Azimuts a aus (57e) zu entnehmen ist. Werden endlich die im Verlaufe der Rechnung konstanten Größen vereinigt, indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= \sqrt{\frac{q}{1-q}}\,h^2\Big[1 - \frac{1+q}{3(1-q)}h + \frac{q(2+q)}{4(1-q)^2}h^2 - \\ &\qquad - \frac{q(1+7q+2q^2)}{10(1-q)^3}h^3 + \cdots\Big], \\ H_0 &= \sqrt{\frac{q}{1-q}}\Big[2(2q-1)h - \frac{3-2q}{1-q}qh^2 + \frac{q}{(1-q)^2}h^3 - \\ &\qquad - \frac{5q^2}{4(1-q)^3}h^4 + \frac{q^2(1+6q)}{4(1-q)^4}h^5 - \cdots\Big], \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

schreibt man weiter $1-h$ statt ϱ und trennt das bekannte Glied Δt ab, so kommt schließlich:

$$\begin{aligned} &(t-t_e)\Delta v - v\Delta t_e + \cos a\cos e\,\Delta b + \sin a\cos b_0\cos e\,\Delta l - \\ &- \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}}\Big[\frac{1-q(1+\varrho^2)}{2q}\operatorname{tg}\psi - \frac{1-2q}{2q}\psi - Q_0\Big]\frac{\Delta q}{1-q} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4q(1-q)}}\Big\{[1-q(1+\varrho^2)]\operatorname{tg}\psi - 2h\Big(1-\frac{h}{2}\Big)q\cot\psi + \\ &\qquad + \sqrt{4q(1-q)} + H_0\Big\}\frac{\Delta h}{1-h} + v\Delta t = 0. \end{aligned} \qquad (66)$$

Die Fehlergleichung erscheint hier schon unter der für numerische Rechnung bequemsten Form; die vorkommenden Faktoren sind meist schon durch die Ephemeridenrechnung bekannt.

Die Zahl der gesuchten Verbesserungen beträgt sechs, stimmt also vollkommen mit dem Problem der Bahnverbesserung überein; sie beziehen sich auf die Breite, Länge und die Zeit des Epizentrums, auf die Tiefe des Herdes, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die von der Dichteverteilung und brechenden Kraft der Erde abhängigen Konstante q.

Ich halte es für das zweckmäßigste, auch die Koeffizienten der Fehlergleichung für eben jene äquidistante φ zu berechnen, für welche die Ephemeride hergeleitet wurde, mit Ausnahme natürlich des Koeffizienten von Δb und Δl, welche für jede einzelne Station besonders berechnet werden müssen. Die von dem Azimute der Stationen unabhängigen Koeffizienten werden so-

nach für die tatsächlichen Abstände q der Stationen interpoliert, wobei jedoch die höheren Differenzen noch in Betracht gezogen werden müssen. Die Werte von Q_0 und H_0 können den im Anhange mitgeteilten Tabellen entnommen werden.

Bei einer größeren Zahl von Beobachtungen können die nahen gleichen Δt benachbarter Stationen in Normalörter zusammengezogen werden, so daß das Mittel der Δt als für das Mittel der φ der Stationen angesehen wird. Besonders bequem erscheint dies, wenn man den Ort des Epizentrums nicht zu verbessern wünschte. Insofern die Zahl der Beobachtungen oder der Normalörter größer als sechs ist, gelten dieselben Normen wie in der Astronomie, die wörtlich aus Oppolzers Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten (Leipzig 1880) II. Bd. Seite 311—370 übernommen werden können. Besonders beherzigenswert ist der Fall, daß eine der Unbekannten nur unsicher bestimmt werden kann, was in unserem Probleme für Δh immer, und für Δq häufig stattfinden kann, wenn q nahe $\frac{1}{2}$ ist. Die Bearbeitung des Ceram-Bebens zeigte mir, daß sich die Herdtiefe aus lauter Zeitbeobachtungen entfernter Stationen nicht bestimmen lasse, daß aber die Unsicherheit dieses Elements die übrigen nicht beeinflusse.

Als Rechenbeispiel zu der auseinandergesetzten Methode siehe: Determinatio elementorum seismicorum exemplo primae terrae motus Ceramensis phaseos exhibita.*

Wären die gefundenen Verbesserungen so groß, daß die Gleichung (66) nicht mehr als linear gültig betrachtet werden darf, so müßte die Rechnung mit den verbesserten Elementen wiederholt werden.

Ein wesentlicher Unterschied gegen die astronomische Bahnbestimmung bleibt jedoch bestehen, auf den kurz schon Seite 60 hingewiesen wurde.

Das Seismogramm eines Fernbebens entwickelt sich nämlich, selbst wenn im Epizentrum nur *ein* Stoß stattgefunden haben sollte, in ein sozusagen „seismisches Spektrum". Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit stets nach der Formel

* Abrégé du Bulletin de la Société Hongroise de Géographie. XXXIII. Vol. 1905. 25—31.

$$u = \frac{\varphi}{t - t_e} \tag{67}$$

der gleichförmigen Bewegung berechnet wurde, so faßt man allgemein die Sache so auf, als ob sich die verschiedenen Phasen des Bebens, deren Zahl heute schon auf 8 gestiegen ist, verschieden schnell fortpflanzten, wobei die Verhältnisse der Geschwindigkeiten der Erfahrung nach nahezu eine harmonische Reihe abgeben.

Nach der vorliegenden Theorie ist aber noch eine andere Auffassung möglich. Es ist bekannt, daß die Wellen der Bebenstrahlen verschiedene Länge besitzen, und die kürzesten verursachen vielleicht die Erdbebengeräusche. Dann könnte aber die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit u einer durch seismische Dispersion des Erdbodens bedingten Veränderlichkeit von q zur Last geschrieben werden, wogegen sich v selbst nur innerhalb der engen Grenzen bewegen könnte, welche durch die Änderung des Brechungsindex nach der Wellenlänge vorgeschrieben sind.

Inwiefern diese Anschauung bestehen mag, kann ich in diesem Momente nicht entscheiden, doch sind darauf bezügliche Untersuchungen schon im Gange. Es ist jedenfalls wichtig, daß die empirische Gleichung Omoris auf Seite 63 theoretisch gestützt werden kann, und vielleicht geben gerade die beiden Konstanten der Gleichung schätzbare Winke.

Die Länge des Seismogramms kann durch die Dauer der einzelnen Phasen, also durch Δt gemessen werden. Der uns hier interessierende Teil der Gleichung (66) lautet daher

$$\Delta t = (t - t_e)\, v \Delta \left(\frac{1}{v}\right),$$

und zwar ist diese Gleichung wegen der linearen Beziehung von t und $\frac{1}{v}$ für beliebige endliche Veränderungen gültig. Wenn man dagegen die partielle Dispersion einer Bebenphase mit Δq bezeichnet, so gibt wieder (66) in roher Annäherung $\varrho = 1$ setzend:

$$\Delta t = \frac{2\,(1 - 2q)}{\sqrt{4\,q\,(1-q)^3}\, v}\,(\operatorname{tg}\psi - \psi)\,\Delta q,$$

welcher Ausdruck ebenfalls nur von der Entfernung des Epizentrums abhängt.

Für diese zweite Auffassung müßte die Ephemeride einer jeden Phase mit einem besonderen q-Werte berechnet werden; sind aber nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der einzelnen Phasen verschieden, so sind einfach die Werte $t - t_e$ der ersten Ephemeride mit den Verhältniszahlen der Geschwindigkeiten der ersten zur zweiten, der ersten zur dritten usw. Phase durchzumultiplizieren, um die Ephemeride der zweiten, dritten usw. Phase zu erhalten.

Die für die einzelnen Phasen gültigen Fehlergleichungen hängen nun derart miteinander zusammen, daß für dieselben Δh, Δb, Δl, und im Falle eines einzigen Stoßes Δt_e stets dieselben bleiben, während Δv und Δq andere Werte annehmen können.

In der Tat ergaben sich bei der Berechnung des Cerambebens für einige Phasen mit Sicherheit negative q, also Strahlen, welche in Hyperbeln durch das Innere der Erde liefen und dem Erdmittelpunkte bis auf ein Viertel des Radius nahekamen. Es ist leicht zu sehen, wie sich die Formeln für einen hyperbolischen Strahl gestalten.

Bei der Berechnung der Ephemeride bedurfte es noch der Kenntnis von τ_0, welches aus (41b) mit Hilfe der Reihen (60b), oder unmittelbar aus dem Integrale (19) für den Fall $e = 90^0$ hergeleitet werden kann; man findet

$$v\tau_0 = h + \frac{q}{2(1-q)}h^2 - \frac{q}{6(1-q)^2}h^3 + \\ + \frac{q^2}{8(1-q)^3}h^4 - \frac{q^2(1+4q)}{40(1-q)^4}h^5 + \cdots \tag{68a}$$

oder unter selbstverständlicher Kürzung

$$v\tau_0 = h + h_1, \tag{68b}$$

wo h_1 der im Anhange gegebenen Tafel als Korrektion entnommen werden kann.

Über die Berechnung solcher Beben, deren Epizentrum unbekannt ist, bleibt uns nun kaum etwas zu sagen.

Der seismische Hodograph.

Wird die Stoßzeit als Ordinate, die sphärische Distanz vom Epizentrum als Abszisse aufgetragen, so erhält man den seismischen Hodographen. Und da t und τ sich nur um eine Konstante unterscheiden, so kann (41) als Gleichung des Hodographen angesehen werden, wenn darin ψ durch φ ausgedrückt gedacht wird. Die Gleichung (66) gibt für die Tangente des Hodographen die interessante Beziehung

$$v\frac{dt}{d\varphi} = \cos e, \tag{69}$$

welche sogleich zeigt, daß die Kurve im Punkte $\varphi = 0$ wegen $\cos e = 0$ im Koordinatenanfange mit dem Werte Null beginnt, und anfänglich der Abszissenachse parallel läuft. Die Kurve steigt kontinuierlich an und endet in dem Antipodenpunkte des Epizentrums wieder horizontal verlaufend in der Höhe τ_{180}, welche durch

$$v\tau_{180} = 1 + \frac{1}{\sqrt{q(1-q)}}\arcsin\sqrt{q} - v\tau_0$$

gegeben ist. Inflexionspunkt besitzt der Hodograph nur in dem Falle, als $q < \frac{1}{2}$ ist, ein Maximum tritt ein für $q > \frac{1}{2}$ (s. Gl. 14). Kann die Kurve mit einiger Genauigkeit gezeichnet werden, so mag sie recht gut als Fingerzeig für die der Rechnung zugrunde zu legenden Elemente dienen.

$\frac{d\varphi}{dt}$ ist offenbar der Grenzwert jener Geschwindigkeit, die man erhält, wenn der Unterschied der epizentralen Entfernungen zweier Stationen durch die Differenz der Beobachtungszeiten dividiert wird; mit anderen Worten: die Entfernung zweier Sekundenhomoseisten. Nennt man diese Größe v_a die scheinbare Geschwindigkeit, so hat man nach (69) die wichtige Gleichung

$$\frac{v}{v_a} = \cos e, \tag{70}$$

welche besagt, daß die scheinbare Geschwindigkeit stets größer ist, als die tatsächliche Oberflächengeschwindigkeit. Nur gegen die Grenze eines räumlich beschränkten Bebens und in der Nähe des Inflexionspunktes, wo der Emersionswinkel schon klein ist,

können beide Geschwindigkeiten als einigermaßen gleich betrachtet werden. Im Epizentrum ist $v_a = \infty$, nimmt aber nach auswärts sehr rasch ab.

Die in Japan seit 1893 eingeführte seismische Triangulation führt zur genauen Kenntnis von v_a, und wäre auch der Emersionswinkel genau bekannt, so könnte hieraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Beben berechnet werden.

Aus den Beobachtungen wurde zumeist die durch die Gleichung (67) definierte Durchschnittsgeschwindigkeit berechnet,

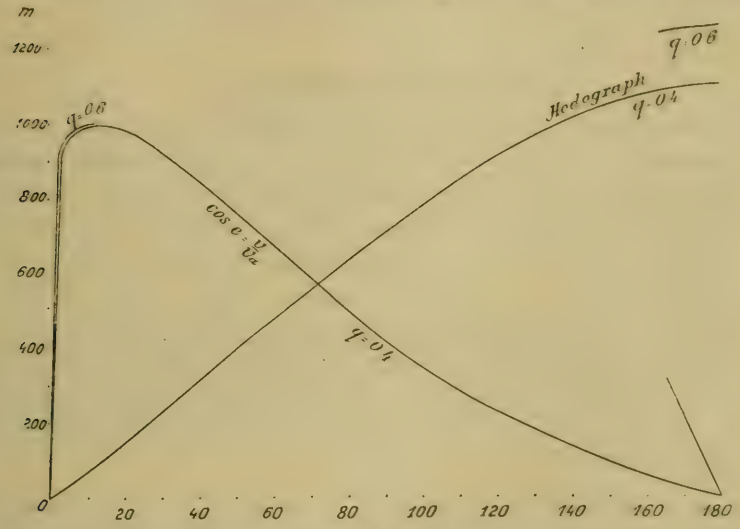


Fig. 2.

welche man aus der Entfernung des Epizentrums und der Zeitdifferenz des Eintretens des Stoßes bestimmt. Ihren Zusammenhang mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergeben die Gleichungen (67), (44) und (41 b) zu

$$\sqrt{4q(1-q)}\,\frac{v}{u} = \frac{\psi - \psi_0}{\varphi} + |1 - q(1+\varrho^2)|\,\frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\psi_0}{\varphi},$$

und es ist ersichtlich stets

$$u > v.$$

Die nebenstehende Figur gibt den Hodographen in Minuten, und $\cos e = \frac{v}{v_a}$ für die Ordinateneinheit 1000, unter der Annahme,

daß $h = 0{,}02$ und $v = 13{,}6 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ sei. Die kontinuierliche, vom Epizentrum bis zu dessen Antipodenpunkt reichende Kurve entspricht der Hypothese $q = 0{,}4$, die unterbrochene Kurve ist für $q = 0{,}6$ berechnet. In jener liegt der Inflexionspunkt bei $\Phi' = 18^0{,}9$, und hiefür ist $e = 6^0{,}85$, $\cos e = 0{,}993$, diese dagegen hört bei $\Phi = 16^0{,}7$ mit dem Maximalwert $e = 0$ auf, und setzt sich erst, ebenso, wie die $\cos e$-Kurve bei $163^0{,}3$ anfangend bis zum Antizentrum fort. In dem epizentralen Trakte fallen die Hodographe für $q = 0{,}6$ und $0{,}4$ fast ganz zusammen.

Die Intensität des Bebens.

Die beiden letzten Elemente des Bebens, welche, wie in der Astronomie die Masse des Planeten, aus bloßen Zeitangaben ebenfalls nicht bestimmt werden können, sind die Intensität und der Absorptionskoeffizient der Beben, welch letzterer voraussichtlich in irgend einer Beziehung zur Konstanten q stehen wird.

Die zugrunde zu legenden Daten werden nach gehöriger Reduktion von den Seismometern selbst geliefert, insofern Amplitude und Periode, also auch die Beschleunigung des Stoßes abgeleitet werden kann. Übrigens erhält man letztere annähernd auch aus der nach der FOREL-MERCALLIschen Skala geschätzten Intensität.*

Der Extinktionskoeffizient kann gelegentlich auch ohne Instrumente bestimmt werden, wenn der Radius des Indexkreises, d. h. der Gesamtheit jener Punkte bestimmt werden kann, an denen die Intensität des Bebens die schnellste Abnahme aufweist. Die Intensitätskurve besitzt nämlich einen Inflexionspunkt, dessen Lage aus den Wirkungen des Bebens mitunter bestimmt werden kann. Sein Abstand von dem Epizentrum stellt eine Beziehung zwischen der Herdtiefe und der Absorption fest. Ist jene auf einem von der Intensität unabhängigen Wege, z. B. aus Zeitdaten bekannt, so kann auch diese berechnet werden.

Die strenge Theorie führt auf verwickelte elliptische Integrale, deren strenge Berücksichtigung bei der Unzuverlässigkeit

* Verhandl. d. zweit. internat. seism. Konfer. Leipzig 1904. S. 283.

der heutigen Beobachtungsdaten durchaus überflüssig ist. Die folgende Näherung ist jedenfalls genügend.

Nimmt man nur auf die Absorption Rücksicht, so gilt für die Intensität J die Gleichung

$$\frac{dJ}{J} = -c_0 s\, d\varsigma, \tag{71}$$

in welcher $d\varsigma$ das Bogenelement des elliptischen Strahles bedeutet, an dessen Stelle die Dichte s ist; c_0 stellt eine Konstante vor. Zufolge des ROCHEschen Gesetzes und der Gleichung (18) hat man

$$\frac{dJ}{J} = -c_0 s_1 \frac{1-\alpha\varrho^2}{1-\alpha}\frac{n_1}{n} v\, d\tau = -c_0 s_1 \frac{1-\alpha\varrho^2}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1-q}{1-q\varrho^2}}\, v\, d\tau. \tag{72}$$

ϱ ist zwar eine Funktion von τ, jedoch darf wegen der geringen Herdtiefe ein Mittelwert des in sehr engen Grenzen veränderlichen Faktors herausgehoben werden. Setzt man also

$$c = c_0 s_1 \left[1 + \frac{2\alpha - (1+\alpha)q}{(1-\alpha)(1-q)} h + \cdots\right], \tag{73}$$

so kann die Intensität näherungsweise

$$J = J_0 e^{-cv\tau} \tag{74a}$$

geschrieben werden, wenn J_0 eine Konstante bezeichnet. Ist nun J_e die Intensität im Epizentrum und l der geradlinige Abstand der Station von dem Herde, so wird

$$J = J_e \frac{h^2}{l^2} e^{-cv(\tau-\tau_0)}, \tag{74b}$$

während das Verhältnis der Amplituden durch die Quadratwurzel des Intensitätsverhältnisses gegeben ist.

Man hat nun

$$l^2 = 1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2, \tag{75a}$$

oder wenn hieraus, um alle Entfernungen durch ψ ausgedrückt zu haben, φ mit Hilfe der Gleichung (40) eliminiert wird:

$$l^2 = \frac{2\sin^2\frac{\psi}{2}}{q\cos\psi}\left[\cos\psi + 1 - q\,(1+\varrho^2)\right]. \tag{75b}$$

Die auf diese Weise berechneten Amplituden müssen noch mit $\cos e$ oder $\sin e$ multipliziert werden, um mit den auf den einzelnen Stationen erhaltenen Amplituden der horizontalen oder vertikalen Bewegung vergleichbar gemacht zu werden.

Anhang.

Um die Rechnung der Ephemeride und der Fehlergleichung zu vereinfachen, wurden Tafeln gerechnet, welche mit dem horizontalen Argumente h und dem vertikalen Eingange q die Werte von

$$\varkappa_1,\ h_2,\ Q_0\ H_0 \text{ und } \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$$

ergeben. Sämtliche Werte sind in Einheiten der vierten Dezimalstelle angesetzt.

I.

$\varkappa_1$ Tafel.

q \ h	0,000	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035
0,0	0,0	21,8	43,6	65,6	87,7	110,0	132,3	154,7
0,1	0,0	24,2	48,4	72,8	97,3	121,8	146,4	171,4
0,2	0,0	27,2	54,4	81,7	109,1	136,6	164,2	191,7
0,3	0,0	31,0	62,1	93,2	124,3	155,4	186,6	217,9
0,4	0,0	36,2	72,3	108,3	144,3	180,2	216,2	252,0
0,5	0,0	43,3	86,4	129,4	172,1	214,6	256,9	299,2
0,6	0,0	54,0	107,5	160,6	213,0	264,9	316,7	367,9
0,7	0,0	71,0	142,1	211,5	279,7	346,7	412,8	477,8
0,8	0,0	106,8	210,0	310,0	407,0	501,2	592,8	681,8

II.

h_1 Tafel.

q \ h	0,000	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035
0,0	0,000	0,00000	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,000	0,01363	0,05535	0,1243	0,2206	0,3440	0,4944	0,6718
0,2	0,000	0,03122	0,1247	0,2804	0,4989	0,7772	1,118	1,520
0,3	0,000	0,05344	0,2133	0,4787	0,8490	1,323	1,901	2,581
0,4	0,000	0,08333	0,3215	0,7438	1,319	2,054	2,951	4,005
0,5	0,000	0,1246	0,4967	1,114	1,975	3,074	4,412	5,987
0,6	0,000	0,1867	0,7436	1,667	2,951	4,591	6,585	8,925
0,7	0,000	0,2900	1,153	2,582	4,567	7,097	10,17	13,76
0,8	0,000	0,4958	1,967	4,392	7,748	12,01	17,17	23,20

III.

Q_0 Tafel.

h / q	0,000	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035
0,0	0,0000	0,00000	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,0000	0,08316	0,3306	0,7454	1,322	2,061	2,963	4,025
0,2	0,0000	0,1247	0,4975	1,117	1,980	3,086	4,433	6,019
0,3	0,0000	0,1631	0,6504	1,460	2,587	4,030	5,784	7,848
0,4	0,0000	0,2029	0,8083	1,812	3,209	4,996	7,166	9,718
0,5	0,0000	0,2488	0,9901	2,212	3,922	6,098	8,740	11,84
0,6	0,0000	0,3042	1,209	2,702	4,773	7,411	10,60	14,35
0,7	0,0000	0,3784	1,500	3,344	5,892	9,128	13,03	17,58
0,8	0,0000	0,4925	1,943	4,310	7,560	11,66	16,57	22,26

IV.

H_0 Tafel.

h / q	0,000	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035
0,0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,000	— 26,69	— 53,44	— 80,23	— 107,1	— 134,0	— 160,9	— 187,9
0,2	0,000	— 30,08	— 60,32	— 90,73	— 121,3	— 152,0	— 182,9	— 213,9
0,3	0,000	— 26,35	— 53,04	— 80,05	— 107,4	— 135,1	— 163,1	— 191,4
0,4	0,000	— 16,63	— 33,85	— 51,65	— 70,04	— 89,00	— 108,5	— 128,6
0,5	0,000	— 0,4975	— 1,980	— 4,434	— 7,844	— 12,30	— 17,48	— 23,68
0,6	0,000	+ 23,68	+ 45,72	+ 66,19	+ 85,11	+ 102,5	+ 118,4	+ 132,8
0,7	0,000	+ 59,70	+ 116,6	+ 170,8	+ 222,4	+ 271,6	+ 318,2	+ 362,1
0,8	0,000	+ 117,2	+ 229,2	+ 336,1	+ 438,1	+ 535,6	+ 628,7	+ 717,6

V.

$\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$ Tafel.

h / q	0,000	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035
	0,0	0,000000	0,00000	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0	0,0	0,007705	0,03080	0,06920	0,1229	0,1919	0,2760	0,3753
0,1	0,0	0,01948	0,07775	0,1745	0,3094	0,4821	0,6924	0,9406
0,2	0,0	0,03810	0,1517	0,3401	0,6020	0,9365	1,343	1,821
0,3	0,0	0,06899	0,2742	0,6125	1,082	1,680	2,403	3,252
0,4	0,0	0,1238	0,4902	1,092	1,923	2,977	4,246	5,727
0,5	0,0	0,2309	0,9101	2,019	3,538	5,450	7,741	10,40
0,6	0,0	0,4749	1,858	4,089	7,115	10,88	15,34	20,48
0,7	0,0	1,202	4,628	10,04	17,25	26,07	36,41	48,18
0,8	0,0							

4.

BERICHT ÜBER DIE TÄTIGKEIT DES BUDAPESTER PASTEURINSTITUTES IM JAHRE 1903.

Vom ordentlichen Mitglied Prof. Dr. ANDREAS HŐGYES.

Vorgelegt der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung am 14. November 1904

Von den 3382 Personen, welche infolge einer durch wütende oder wutverdächtige Tieren erfolgten Verletzung das Institut aufsuchten, wurden 2891 der Schutzimpfung unterzogen, bezw. erhielten 2833 den vollständigen, 2—3 Wochen dauernden Turnus, 58 hingegen wurden entlassen, da es sich mittlerweile herausgestellt hatte, daß das verwundende Tier nicht wütend war.

Von den 2833 Schutzgeimpften blieben 2814 am Leben, 19 erlagen trotz der Schutzimpfungen der Lyssa. Von den letzteren sind aber 8 Todesfälle nicht der Methode zur Last zu legen, da die betreffenden Kranken zu spät ins Institut eintraten, um der vollständigen Behandlung unterzogen zu werden. Es entfallen demnach auf 2833 Geimpfte 11 Todesfälle, was einer Mortalität von 0,38 % und einer Genesung von 99,62 % entspricht. Dieses günstige Resultat verschiebt die Statistik der mit 13,91 % Todes- und 86,09 % Genesungsfrequenz festgesetzten Heilungsresultate der nichtgeimpften Kranken auf 0,38 % Todesfälle und 99,62 % Genesungen, was hier einer Steigerung und dort einem Rückgang von 13,53 % entspricht.

Infolge der, besonders seit 1894 fortwährend zunehmenden Frequenz des Instituts beziffert sich die Zahl der seit dem Bestand desselben — 15. April 1890 — behandelten, mit Wut infizierten Personen auf ungefähr 22 000.

Die übrigen Daten des Berichtsjahres entsprechen im allgemeinen denen der verflossenen Jahre: Die Mehrzahl der infizierten Personen machten die zwischen 6 und 15 Jahren stehenden Kinder männlichen Geschlechtes des gewerbetreibenden und in der Landwirtschaft beschäftigten Standes aus, deren größter Teil wieder in Ungarn ansässig war.

Ähnlich verhalten sich die amtlichen Daten über die Verbreitung der Wutkrankheit im Lande, indem in 61 Komitaten von 2040 wütenden Tieren allein 1596 Hunde gezählt wurden, welche letztere wieder 6767 andere Tiere, darunter 6578 andere Hunde, bissen.

Von den mit Lyssa infizierten Personen waren 2558 Ungarn, es ist also im Vergleich zu den früheren Jahren ein fortwährendes Ansteigen der Wutkrankheit zu konstatieren. Desgleichen zeigten sich im Berichtsjahr die siebenbürgischen Komitate, die Ecke zwischen Maros und Tisza, sowie die zu beiden Ufern der Tisza gelegenen Landstriche am meisten durchseucht.

11 Todesfälle wurden aus den verschiedenen Komitaten gemeldet, welche solche Personen betrafen, die sich der Schutzimpfung nicht unterzogen hatten. Hierzu kommen noch die eingangs erwähnten, der Behandlungsmethode nicht anzurechnenden Todesfälle. Ziehen wir nunmehr die, für die nicht behandelten Kranken festgesetzte Mortalitätsfrequenz 13,91%, sowie den von Pasteur für Frankreich festgestellten und auch bei uns gültigen Umstand in Betracht, daß von den nicht geimpften Kranken jeder fünfte bis sechste der Lyssa unterliegt, so ergibt dies 148 nichtgeimpfte Personen mit 18 Todesfällen, d. h. 12,16% Mortalität.

Der Bau des neuen Pasteurinstitutes, welches mit dem Institute für allgemeine Pathologie und Therapie der Budapester Universität in Verbindung steht, wurde im Jahre 1902 begonnen und noch im selben Jahre unter Dach gebracht. Das in der Rákosgasse, in der nächsten Nähe der Klinik erbaute neue Institut ist nun vollkommen fertig. Die zwei, miteinander eng zusammenhängenden Institute, das für allgemeine und experimentelle Pathologie und Therapie und das Pasteurinstitut, stehen auf einem 3270 Quadratmeter umfassenden Grund; die Front in der Rákosgasse ist 43 m lang. Der größte Teil des Grundes bildet ein

rechteckiges Parallelogramm mit einer Tiefe von 54 m. Die südliche Seite dieses Parallelogramms nimmt das Institut für allgemeine Pathologie und Therapie ein, welches aus einem Souterrain, einem hohen Parterre und aus zwei Stockwerken besteht, mit 12 Fenstern in jeder Etage. Der Haupteingang, welcher in der Mitte der Front angebracht ist, führt in das Institut für allgemeine Pathologie, namentlich zu den Laboratorien und zum großen Hörsaal. An jenem Ende der Front, welche der Knezitsgasse näher liegt, ist der Nebeneingang angebracht, durch welchen die, die sich zu den Schutzimpfungen melden, direkt in das Pasteurinstitut geleitet werden können, welches vom vorhin erwähnten Gebäude gänzlich abgesondert ist. Hinter dem Pasteurinstitut ist ein zweiter großer Hof, wo sich die behandelten, sonst gesunden Leute aufhalten können. Den südlichen Teil dieses Hofes nimmt ein Stall ein, in welchem zu Versuchszwecken Pferde oder andere große, ferner auch kleinere Tiere untergebracht werden können, und welcher derart eingerichtet ist, daß dort Stoffwechseluntersuchungen, eventuell Serumbereitung usw. vorgenommen werden können. Der Dachboden des Stalles ist als Taubenhalter eingerichtet. Hinter den Stallungen befindet sich noch ein dritter, kleiner Hof, wohin die in den Stallungen untergebrachten Tiere durch eine hintere Tür hinausgelassen werden können.

Das neue Institut besteht also eigentlich aus zwei Teilen, welche jedoch miteinander eng zusammenhängen. Der eine Teil dient der Förderung der Wissenschaft, der andere rein praktisch-humanistischen Zwecken. Der wissenschaftliche Teil, das Institut für allgemeine Pathologie und Therapie genannt, hat den Zweck, daß in dessen Laboratorien die Ursachen, die Entstehung, die Diagnose und die Heilung der verschiedenen Krankheiten eruiert werden, und daß man daselbst mit der fortwährenden Entwicklung der Wissenschaft, mit den neuen Theorien, Hypothesen und Anschauungen Schritt halten könne.

Rein praktisch-humanistischen Zwecken dient das Pasteurinstitut, dessen Resultate, wie oben bereits bewiesen, die Hygiene unseres Vaterlandes wesentlich befördern, und beweisen, daß man gegen die, wenn auch nicht ausgebreiteteste, doch jedenfalls schrecklichste Krankheit, die es gibt, mit Erfolg kämpfen kann.

Die Resultate dieses Institutes beweisen aber auch, daß man mit dem gewissenhaften experimentellen Studium einzelner, bis dahin wenig gekannter Krankheitsformen für das praktische Leben überaus nützliche Resultate erzielen kann. Die bezüglich der Wut gepflogenen Studien dürfen immerhin als Muster solcher gelten.

Ich bin der kgl. Akademie, vor welcher ich seiner Zeit, als die bezüglich der Wut in Paris gepflogenen Versuche publiziert wurden, meine damaligen selbständig gemachten Versuche und deren Resultate vortrug, viel Dank schuldig, indem mir die Akademie zu der Fortsetzung meiner überaus mühevollen und kostspieligen Versuche die erste Unterstützung angedeihen ließ. Ich bin auch der Universität zu Dank verpflichtet, da sie mir die notwendigen Lokalitäten zur rechten Zeit zur Verfügung stellte. Dank auch unserem Kultusministerium, welches durch reichliche Unterstützung und Durchsetzung gewisser Maßregeln meine Bestrebungen überaus beförderte. Ich muß aber auch meinen ehemaligen und jetzigen Schülern, wie auch einigen Professoren, die mir bei meinen Arbeiten behilflich beistanden, Dank sagen.

5.

DER KEGELSCHNITT ALS ORT VON PUNKTEN, DEREN ABSTANDSVERHÄLTNISSE VON GEWISSEN GEBILDEN KONSTANT SIND.

Von LEOPOLD KLUG.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 14. März 1904.

Aus „Mathematikai és Physikai Lapok" (Mathematische und Physikalische Blätter) Bd. XIII, pp. 255—278, 323—351 und Bd. XIV, p. 57—81.

In diesem Aufsatze werden die Kegelschnitte als Orte von solchen Punkten betrachtet, deren Abstandsverhältnisse

1. von einer Geraden und einem Punkte,
2. von einer Ebene und einem Punkte,
3. von einer Ebene und einer Geraden,
4. von zwei Geraden

konstant sind.

Es wird unsere Aufgabe sein: zu einem gegebenen Kegelschnitt und zu einem der obigen Gebildepaare das andere Gebilde so zu konstruieren, daß die Abstandsverhältnisse der Punkte des Kegelschnittes von diesem Gebildepaare eine Konstante sei.

I. Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von einer Geraden und einem Punkte konstant ist.

1. Gehen wir aus von einem Zentralkegelschnitt $d^{(2)}$ (Fig. 1 und 2).

Die Scheitelpunkte auf seiner Hauptachse seien S, S_1; ein Brennpunkt und die dazu gehörige Leitlinie sei F und f; der

Schnittpunkt von f mit der Hauptachse sei G; der Fußpunkt der von einem beliebigen Punkte P des Kegelschnittes auf f gefällten Senkrechten sei Q. Die Gerade FQ treffe in T, T_1 die Tangenten der Scheitelpunkte S, S_1 des Kegelschnittes.

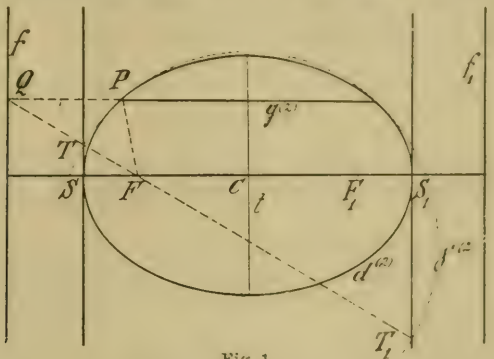


Fig. 1.

Wegen der bekannten Eigenschaft des Brennpunktes und der Leitlinie ist

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{SF}{SG} = \frac{S_1F}{S_1G} = \lambda$$

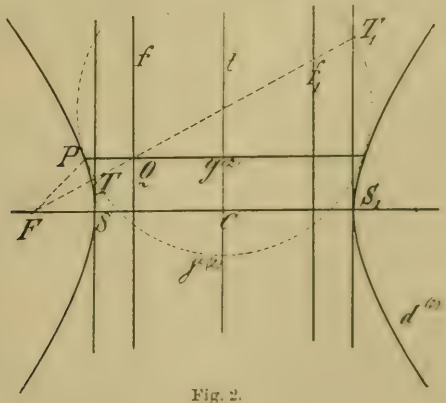


Fig. 2.

und infolge der Konstruktion ist

$$\frac{SF}{SG} = \frac{TF}{TQ}, \qquad \frac{S_1F}{S_1G} = \frac{T_1F}{T_1Q},$$

daher ist

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{TF}{TQ} = \frac{T_1F}{T_1Q} = \lambda.$$

Daraus folgt, daß der Punkt P auf derjenigen Kugel $\gamma^{(2)}$ liegt, deren Durchmesser TT_1 ist. Diese Kugel hat aber die Eigenschaft, daß das Verhältnis der Abstände aller ihrer Punkte von F und Q dasselbe ist, wie die des Punktes P, d. h. λ.

Schneidet man die Kugel $\gamma^{(2)}$ mit einer auf f senkrechten und durch P gelegten Ebene in dem Kreise $g^{(2)}$ und ist X ein Punkt dieses Kreises, so ist

$$XF : XQ = \lambda,$$

und da die Gerade XQ im Punkte Q auf f senkrecht steht, so ist das Verhältnis der Abstände aller Punkte des Kreises $g^{(2)}$ von F und f gleich λ.

Verändert man den Punkt P auf dem Kegelschnitt $d^{(2)}$, so verändert sich auch die Kugel $\gamma^{(2)}$ und der Kreis $g^{(2)}$, aber das Verhältnis der Abstände der Punkte aller Kreise $g^{(2)}$ von F und f bleibt λ. Nachdem nun die Mittelpunkte der Kugeln $\gamma^{(2)}$ und der Kreise $g^{(2)}$ auf der Nebenachse t des Kegelschnitts $d^{(2)}$ liegen, so beschreiben die Kreise $g^{(2)}$ dieselbe Fläche wie der Kegelschnitt $d^{(2)}$, wenn er um die Achse t gedreht wird. Die Kreise $g^{(2)}$ liegen daher entweder auf einem Sferoid oder auf einem einschaligen Rotationshyperboloid auf, je nachdem $d^{(2)}$ eine Ellipse oder Hyperbel ist, d. h. $\lambda < 1$ oder aber > 1 ist.

Wir haben daher folgenden Satz:

Sowohl das Sferoid wie auch das einschalige Rotationshyperboloid hat die Eigenschaft, daß das Verhältnis der Abstände seiner Punkte von jedem Brennpunkte F eines seiner Meridiane und der dazu gehörigen Leitlinie f konstant ist. Die Konstante λ ist im ersten Falle kleiner, im zweiten Falle größer als 1.

Oder:

Der Ort der Punkte, deren Abstände von einem Punkte F und einer Geraden f in konstantem Verhältnisse (λ) stehen, ist ein Sferoid oder ein einschaliges Rotationshyperboloid, je nachdem dieses Verhältnis < 1 oder aber > 1 ist.

2. Betrachten wir jetzt den Fall $\lambda = 1$, d. h. *suchen wir den Ort jener Punkte, welche von einem Punkte F und einer Geraden f denselben Abstand haben.*

Der Punkt F ist der Brennpunkt, die Gerade f aber die

Leitlinie einer Parabel $d^{(2)}$, durch welche wir einen Zylinder legen, dessen Erzeugende auf der Ebene der Parabel $d^{(2)}$ senkrecht stehen. Sind P' und Q die Fußpunkte der Lote, die man von einem beliebigen Punkte P jenes parabolischen Zylinders auf die Ebene der Parabel $d^{(2)}$ bezw. auf die Gerade f fällt, so ist

$$P'F = P'Q,$$

und wegen der Kongruenz der Dreiecke $PP'F$, $PP'Q$ ist

$$PF = PQ.$$

Zieht man noch in Betracht, daß $d^{(2)}$ durch jeden Normalschnitt des parabolischen Zylinders ersetzt werden kann, so folgt:

Die Punkte eines parabolischen Zylinders haben gleichen Abstand von dem Brennpunkte und der Leitlinie eines jeden Normalschnittes des Zylinders.

3. *Im Falle $\lambda = 1$ ist also der gesuchte Ort ein parabolischer Zylinder.* Dies können wir auch unmittelbar einsehen.

Dreht man nämlich die Parabel $d^{(2)}$, so wie in den zwei ersten Fällen die Ellipse und die Hyperbel, um die Nebenachse, so geht diese Drehung in eine Verschiebung (Translation) über nach der auf die Ebene von $d^{(2)}$ senkrechten Richtung, und die verschobene Parabel $d^{(2)}$ beschreibt eine verkümmerte Rotationsfläche, nämlich den parabolischen Zylinder. Die Normalschnitte dieses Zylinders sind die Meridiane jener Rotationsfläche. Die Hauptachsen der Meridiane des Sferoids und des einschaligen Rotationshyperboloids liegen in der Symmetrieebene (Äquatorebene) dieser Rotationsflächen; ebenso liegen auch die Achsen der Normalschnitte eines parabolischen Zylinders in der Symmetrieebene (Hauptebene) dieses Zylinders, welche also als die Äquatorebene der verkümmerten Rotationsfläche betrachtet werden kann.

Die Brennpunkte der Meridiane des Sferoids und des einschaligen Rotationshyperboloids liegen auf dem *Fokalkreis* dieser Flächen; die Leitlinien der Meridiane liegen auf einem Rotationszylinder, den man *Leitzylinder* nennen kann. Ebenso liegen die Brennpunkte der Normalschnitte des parabolischen Zylinders auf der *Fokalachse* des Zylinders, während die Leitlinien dieser Normalschnitte in der *Leitebene* des parabolischen Zylinders liegen. In

beiden Fällen stehen die Leitlinien auf den Hauptebenen jener Flächen senkrecht.

4. Wir schneiden das Sferoid, das einschalige Rotationshyperboloid und den parabolischen Zylinder mit der Ebene ε in dem Kegelschnitt $e^{(2)}$. Das Verhältnis λ der Abstände der Punkte des Kegelschnitts $e^{(2)}$ von einem beliebigen Punkte F des Fokalkreises oder der Fokalachse jener Flächen und von der zu dem Punkte F gehörigen Leitlinie f des bezüglichen Meridians ist konstant, und zwar entsprechend den drei Fällen kleiner, größer oder gleich 1.

Jeder ebene Schnitt des Sferoids ist eine Ellipse oder ein Kreis, der des parabolischen Zylinders eine Parabel oder ein paralleles Geradenpaar; endlich können die ebenen Schnitte des Rotationshyperboloids Ellipsen (Kreise), Hyberbeln, Parabeln, sich schneidende oder parallele Geradenpaare sein. Andererseits gehen die Hauptachsen der ebenen Schnitte des Sferoids, die Achsen der ebenen Schnitte des parabolischen Zylinders, die Nebenachsen der elliptischen und die Scheiteltangenten der parabolischen, endlich die Haupt- oder Nebenachsen der hyperbolischen ebenen Schnitte des einschaligen Rotationshyperboloids parallel mit den Äquator- oder Hauptebenen jener Flächen. Daraus folgt:

Der Ort jener Punkte in der Ebene ε, deren Abstände von einem von der Ebene unabhängigen Punkte F und einer Geraden f in konstantem Verhältnisse λ stehen, ist ein Kegelschnitt $e^{(2)}$. Dieser Kegelschnitt $e^{(2)}$ ist immer eine Ellipse, wenn $\lambda < 1$; ist immer eine Parabel, wenn $\lambda = 1$; endlich ist $e^{(2)}$ eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn $\lambda > 1$.

Im ersten Falle ($\lambda < 1$) steht die Hauptachse der Ellipse, im zweiten Falle ($\lambda = 1$) die Achse der Parabel, im dritten Falle ($\lambda > 1$) die Nebenachse der Ellipse, die Scheiteltangente der Parabel, endlich irgendeine Achse der Hyperbel senkrecht zur Geraden f.

Steht die Gerade f senkrecht zur Ebene ε, so geht im ersten und dritten Falle die Ellipse in einen Kreis über, im zweiten aber geht die Parabel in eine Gerade über.

Nachdem wir aus den bisherigen Erklärungen erkannt haben, daß die Kegelschnitte nicht nur gegenüber ihren Brennpunkten

und ihren Leitlinien, sondern auch gegenüber anderen Punkten und Geraden die Eigenschaft haben, daß das Verhältnis der Abstände ihrer Punkte von diesen Punkten und Geraden ein konstantes ist, beabsichtigen wir die folgende Aufgabe zu lösen:

Es ist gegeben in der Ebene ε der Kegelschnitt $c^{(2)}$; wir wollen zu einer gegebenen Geraden f den Punkt F oder zu einem gegebenen Punkt F die Gerade f in der Weise bestimmen, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte des Kegelschnitts von F und f eine Konstante sei.

5. Nehmen wir zunächst an, *daß $c^{(2)}$ eine Ellipse sei, ferner*

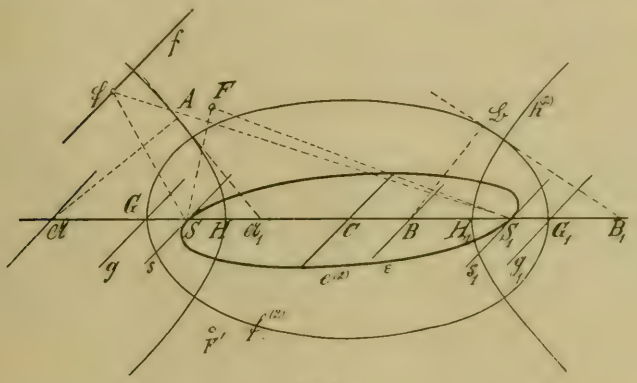


Fig. 3.

daß die Gerade f zur Nebenachse von $c^{(2)}$ parallel geht und entweder in der Ebene ε von $c^{(2)}$ oder außerhalb dieser Ebene liegt.

Durch $c^{(2)}$ wollen wir ein solches Sferoid legen, daß 1) dessen Meridiane $d^{(2)}$ dem $c^{(2)}$ ähnlich sind, 2) die Gerade f eine Leitlinie eines der Meridiane $d^{(2)}$ sei, endlich 3) der Mittelpunkt M des Sferoids auf derjenigen Geraden m liege, welche im Mittelpunkte C der Ellipse $c^{(2)}$ auf ihrer Ebene ε senkrecht steht.

Wir bezeichnen die Haupt- und Nebenachse von $c^{(2)}$ mit $2a$ und $2b$, die Exzentrizität mit e, die Scheitelpunkte auf der Hauptachse mit S und S_1, die durch die Hauptachse gehende und auf der Ebene ε senkrechte Ebene mit δ, endlich den Schnittpunkt von f und δ mit $\mathfrak{F}$ (Fig. 3).

Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Ellipse $c^{(2)}$ von einer ihrer Leitlinien und dem dazu gehörigen Brennpunkt ist

$a : c$. Dieses Verhältnis müssen auch die Abstände der Punkte des Meridians $d^{(2)}$ wie auch die Abstände aller Punkte des gesuchten Sferoids von der Geraden f und von dem zu suchenden Punkt F haben. Deshalb ist

$$\frac{S\mathfrak{F}}{SF} = \frac{S_1\mathfrak{F}}{S_1F} = \frac{a}{c}. \tag{1}$$

Beschreibt man daher in der Ebene δ aus den Punkten S und S_1 bezw. mit den Radien

$$SF = S\mathfrak{F} \cdot \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad S_1F = S_1\mathfrak{F} \cdot \frac{c}{a} \tag{2}$$

Kreise, welche sich in den Punkten F und F' treffen, so sind $[fF]$ und $[fF']$ schon die Ebenen der gesuchten Meridiane $d^{(2)}$ und $d'^{(2)}$; f und F bezw. F' sind die zu diesen Meridianen gehörigen Leitlinien und Brennpunkte; endlich trifft die im Mittelpunkte C des Kegelschnitts $e^{(2)}$ auf seiner Ebene errichtete Senkrechte m jene Meridianebenen in den Mittelpunkten der Meridiane.

Die Meridiane $d^{(2)}$ und $d'^{(2)}$ bestimmen je ein Sferoid. Die Abstände der Punkte des ersten Sferoids von f und F, die Abstände der Punkte des zweiten Sferoids von f und F', endlich die Abstände der Punkte des Kegelschnitts $e^{(2)}$ sowohl von f und F wie auch von f und F' stehen im Verhältnisse $a : c$. Die Punkte F, F' sind Spiegelbilder voneinander in bezug auf die Ebene von $e^{(2)}$.

6. Untersuchen wir jetzt die Veränderung der Punkte F, wenn sich die Gerade f mit sich selbst, d. h. mit der Nebenachse von $e^{(2)}$ parallel bewegt. Zu dem Ende hat man nur die Abhängigkeit des Punktes F von der Lage des Durchschnittspunktes $\mathfrak{F} \equiv (f, \delta)$ zu untersuchen.

Schon die Gleichung (2) zeigt, daß, wenn der Punkt $\mathfrak{F}$ um S oder S_1 konzentrische Kreise in der Ebene δ beschreibt, dann beschreibt auch F um dieselben Punkte in der Ebene δ konzentrische Kreise, und die Radien $S\mathfrak{F}$ und SF sowie $S_1\mathfrak{F}$ und S_1F zweier zusammengehöriger Kreise stehen im Verhältnisse $a : c$.

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$\frac{S\mathfrak{F}}{S_1\mathfrak{F}} = \frac{SF}{S_1F} \tag{3}$$

oder

$$\pm (S\mathfrak{F} \pm S_1\mathfrak{F}) = \pm \frac{a}{c}(SF \pm S_1F). \tag{4}$$

Beschreibt $\mathfrak{F}$ einen Kreis in der Ebene δ, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse SS_1 von $e^{(2)}$ liegt, und in bezug auf welchen die Punkte S, S_1 konjugierte Pole sind, so beschreibt laut (3) der Punkt F denselben Kreis, d. h. „die Punkte $\mathfrak{F}$ und F beschreiben zu gleicher Zeit die Kreise derjenigen Kreisschar, deren Nullkreise die Scheitelpunkte auf der Hauptachse von $e^{(2)}$ sind".

Aus der Gleichung (4) folgt: Beschreibt $\mathfrak{F}$ einen Kegelschnitt derjenigen konfokalen Schar, deren Brennpunkte S, S_1 sind, so beschreibt F einen anderen Kegelschnitt derselben Schar. Je zwei in dieser Weise zugeordnete Kegelschnitte sind entweder beide Ellipsen oder beide Hyperbeln, und das Verhältnis ihrer Hauptachsen ist $a : c$.

Welche sind in dieser Schar die den Grenzkegelschnitten entsprechenden Kegelschnitte?

Beschreibt erstens der Punkt $\mathfrak{F}$ diejenige Ellipse $f^{(2)}$ in der Schar, deren Hauptachse $\frac{2a^2}{c}$, also deren Nebenachse $\frac{2ab}{c}$ ist, so wird wegen

$$S\mathfrak{F} + S_1\mathfrak{F} = \frac{2a^2}{c}$$

die Hauptachse der $f^{(2)}$ zugeordneten Ellipse

$$SF + S_1F = 2a$$

sein; also verkümmert diese Ellipse in die Hauptachse SS_1 von $e^{(2)}$.

Demnach gehören zu allen außerhalb $f^{(2)}$ liegenden Punkten $\mathfrak{F}$ reelle Punkte F, zu allen innerhalb $f^{(2)}$ liegenden Punkten $\mathfrak{F}$ imaginäre Punkte F, endlich gehören zu den Punkten $\mathfrak{F}$ von $f^{(2)}$ diejenigen Punkte F in der Hauptachse von $e^{(2)}$, welche auf der von den Brennpunkten H, H_1 dieser Ellipse begrenzten endlichen Strecke liegen.

Beschreibt zweitens der Punkt $\mathfrak{F}$ denjenigen Teil der Hauptachse von $e^{(2)}$, welcher außerhalb des von den Leitlinien abgeschnittenen endlichen Stückes liegt, so beschreibt F die Fokalhyperbel $h^{(2)}$ der Ellipse $e^{(2)}$, da aus der Gleichung

$$\pm (S\mathfrak{F} - S_1\mathfrak{F}) = 2\mathring{a}$$

folgt, daß

$$\pm (SF - S_1F) = 2c.$$

Zu einem innerhalb $h^{(2)}$ liegenden Punkte F gehört daher kein reeller Punkt $\mathfrak{F}$; zu den Punkten F der Fokalhyperbel $h^{(2)}$ gehört aber je eine in der Ebene von $e^{(2)}$ außerhalb des von den Leitlinien begrenzten Parallelstreifens liegende Gerade f.

Also erfüllen die Punkte $\mathfrak{F}$ den außerhalb $f^{(2)}$ und die Punkte F den außerhalb $h^{(2)}$ liegenden Teil der Ebene δ.

7. Es sei A ein außerhalb der Ellipse $f^{(2)}$ liegender Punkt der Hyperbel $h^{(2)}$, und es treffe die Normale und Tangente des Punktes A die Hauptachse SS_1 von $e^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$. Der dem Dreieck $A\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ umschriebene Kreis gehört zu derjenigen Schar, deren Nullkreise die Punkte S, S_1 sind. Also entspricht (6) dem Punkte $\mathfrak{A}$ als einem Punkte $\mathfrak{F}$, der Punkt A als ein Punkt F. D. h.

Schneidet die Normalebene eines Punktes F der Fokalhyperbel der Ellipse $e^{(2)}$ die Ebene der letzteren in der Geraden f, so stehen die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von F und f in demselben Verhältnisse, wie die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von einem ihrer Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie.

Oder:

Jeden Punkt F der Fokalhyperbel einer Ellipse $e^{(2)}$ kann man als Brennpunkt betrachten; die zu diesem Brennpunkte gehörige Leitlinie ist diejenige Gerade f, in welcher die Normalebene des Punktes F die Ebene der $e^{(2)}$ schneidet. Das Verhältnis der Abstände der Punkte von diesen Brennpunkten F und den zugehörigen Leitlinien f ist konstant.

Die auf jeder dieser Leitlinien f liegende Punktinvolution der in bezug auf $e^{(2)}$ konjugierten Pole werden von den zugehörigen Brennpunkten F durch orthogonale Strahleninvolutionen projiziert.

Den letzten Teil des Satzes, der von den gewöhnlichen Leitlinien und Brennpunkten eines Kegelschnittes längst bekannt ist, können wir wie folgt beweisen:

Durch $e^{(2)}$ legen wir dasjenige Sferoid, dessen Meridianebene $[fF]$ ist. Bezüglich des in dieser Ebene liegenden Meridians $d^{(2)}$ ist f und F eine gewöhnliche Leitlinie und der dazu gehörige

Brennpunkt. Also wird die Punktinvolution der konjugierten Pole von f in bezug auf $d^{(2)}$ aus dem Brennpunkte F durch eine orthogonale Strahleninvolution projiziert. Jene konjugierten Pole sind aber auch konjugierte Pole in bezug auf das Sferoid und daher auch in bezug auf $e^{(2)}$, w. z. b. w. —

Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ ein außerhalb $h^{(2)}$ liegender Punkt der Ellipse $f^{(2)}$, und es treffe die Normale und Tangente dieses Punktes die Achse SS_1 in den Punkten B, B_1. Da der dem Dreieck $\mathfrak{B}BB_1$ umschriebene Kreis zu derjenigen Schar gehört, deren Nullkreise die Punkte S, S_1 sind, so ist dem Punkte $\mathfrak{B}$ als Punkt $\mathfrak{F}$ der Punkt B als Punkt F zugeordnet.

Daher:

Konstruiert man zur Ellipse $e^{(2)}$ einen elliptischen Zylinder $F^{(2)}$, dessen in der Ebene von $e^{(2)}$ liegende Erzeugenden die gewöhnlichen Leitlinien, und dessen Fokalachsen die Scheiteltangenten von $e^{(2)}$ sind, so stehen die Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von jeder Erzeugenden f des Zylinders $F^{(2)}$ und von demjenigen Punkte F, in welchem die Normalebene der Erzeugenden f die Hauptachse von $e^{(2)}$ trifft, in konstantem Verhältnisse.

Zu jeder mit der Erzeugenden des Zylinders parallelen und außerhalb des Zylinders liegenden Geraden f gehört ein reeller Punkt F, welcher die Eigenschaft hat, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von F und f ein konstantes ist.

8. Nehmen wir jetzt eine Hyperbel $e^{(2)}$ an. Durch $e^{(2)}$ kann man unendlich viele einschalige Rotationshyperboloide legen, deren Meridiane mit $e^{(2)}$ ähnlich sind. Das Verhältnis der Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von den Brennpunkten F und Leitlinien f der Meridiane jener Hyperboloide ist ein konstantes. Analog dem früheren Verfahren kann man auch in diesem Falle zeigen, daß:

Wenn man zur Hyperbel $e^{(2)}$ einen hyperbolischen Zylinder $F^{(2)}$ konstruiert, dessen Scheitelerzeugende die Leitlinien, und dessen Fokalachsen die Scheiteltangenten von $e^{(2)}$ sind, so kann man zu jeder mit den Zylindererzeugenden parallelen und nicht innerhalb des Zylinders liegenden Geraden f zwei ebenfalls nicht innerhalb der Fokalellipse jener Hyperbel $e^{(2)}$ liegende Punkte F und F' in der Weise konstruieren, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von F und f, sowie von F' und f ein konstantes

ist; dieses Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der Exzentrizität und der halben Hauptachse von $e^{(2)}$.

Den Erzeugenden f des Zylinders $F^{(2)}$ *sind diejenigen Punkte F zugeordnet, in welchen die Normalebene der Erzeugenden die Hauptachse der Hyperbel* $e^{(2)}$ *trifft; während den in der Ebene der Hyperbel liegenden Geraden f diejenigen Punkte F der Fokalellipse zugeordnet sind, deren zur Fokalellipse gehörige Normalebenen durch jene Gerade f gehen. Auch werden die Punktinvolutionen der auf diesen letzteren Geraden f liegenden und in bezug auf* $e^{(2)}$ *konjugierten*

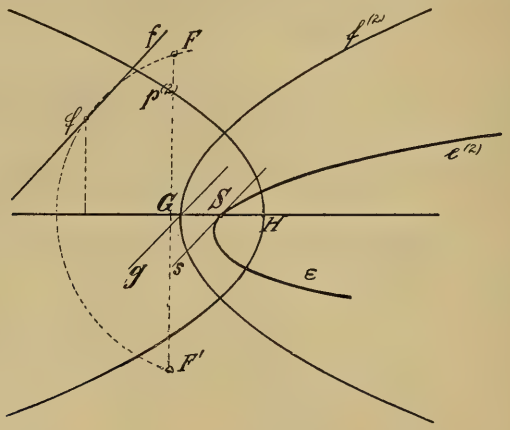


Fig. 4.

Polen aus den entsprechenden Punkten F durch orthogonale Strahleninvolutionen projiziert.

9. Nehmen wir schließlich eine Parabel $e^{(2)}$ an, deren Scheitel- und Brennpunkt S und H ist, und untersuchen wir die gegenseitige Lage derjenigen mit der Scheiteltangente parallelen Geraden f, und derjenigen Punkte F, von welchen die Punkte der Parabel einen gleichen Abstand haben.

Zu dem Ende legen wir (Fig. 4) durch die Parabel $e^{(2)}$ einen parabolischen Zylinder, dessen Hauptebene δ durch die Achse von $e^{(2)}$ gehend auf der Ebene ε von $e^{(2)}$ senkrecht steht, und dessen Erzeugende sich zur Ebene ε unter dem Winkel φ neigen. Die Punkte von $e^{(2)}$ haben von den Leitlinien f und Brennpunkten F aller Normalschnitte dieses Zylinders einen gleichen Abstand.

Der Abstand eines Brennpunktes F von der zugehörigen Leitlinie f ist $2SH : \sin\varphi$, also ist der Abstand der orthogonalen Projektion des Punktes F von der orthogonalen Projektion der Geraden f auf die Ebene ε, gleich $2SH$.

Wenn daher eine Parabel $e^{(2)}$ und eine mit ihrer Scheiteltangente parallele Gerade f gegeben ist, und man beschreibt aus dem Scheitelpunkte S der Parabel in der durch ihre Achse gehenden und auf ihrer Ebene senkrechten Ebene δ einen Kreis, welcher die Gerade f trifft, so schneidet dieser Kreis diejenige auf die Achse von $e^{(2)}$ senkrechte Ebene, welche von f denselben Abstand hat wie der Brennpunkt der $e^{(2)}$ von der Leitlinie, in zwei Punkten F und F'. Jeder Punkt der Parabel $e^{(2)}$ hat sowohl von F und f wie auch von F' und f gleichen Abstand.

Nicht zu jeder mit der Scheiteltangente der Parabel $e^{(2)}$ Parallelen f gehört ein reeller Punkt F, sondern nur zu denen, welche nicht innerhalb desjenigen parabolischen Zylinders liegen, dessen Scheitelerzeugende die Leitlinie und dessen Fokalachse die Scheitelerzeugende der $e^{(2)}$ ist. Den Erzeugenden f dieses Zylinders sind diejenigen Punkte F zugeordnet, in welchen die Normalebene der Erzeugenden die Achse der Parabel trifft. Auch sind den in der Ebene der Parabel $e^{(2)}$ liegenden und zur Scheiteltangente Parallelen f diejenigen Punkte F der Fokalparabel der $e^{(2)}$ zugeordnet, deren zu dieser Fokalparabel gehörige Normalebenen durch die betreffenden Geraden f gehen.

Wir haben daher:

Konstruiert man zur Parabel $e^{(2)}$ einen parabolischen Zylinder $F^{(2)}$, dessen Scheitelerzeugende die Leitlinie und dessen Fokalachse die Scheiteltangente der $e^{(2)}$ ist, so gibt es zu jeder außerhalb des Zylinders liegenden und mit den Erzeugenden parallelen Geraden f zwei solche reelle Punkte F und F', daß der Abstand der Punkte der Parabel $e^{(2)}$ von F und f, sowie von F' und f gleich ist.

Ist f eine Erzeugende des Zylinders $F^{(2)}$, so ist der zugeordnete Punkt F der Treffpunkt der Normalebene jener Erzeugenden mit der Achse der Parabel $e^{(2)}$.

Liegt f in der Ebene der Parabel $e^{(2)}$, so fallen die zugeordneten Punkte F und F' in diejenigen Punkte der Fokalparabel

von $e^{(2)}$, deren Normalebenen durch f gehen. Auch werden die Punktinvolutionen der auf diesen Geraden f liegenden und in bezug auf $e^{(2)}$ konjugierten Pole aus den zugeordneten F und F'-Punkten durch orthogonale Strahleninvolutionen projiziert.

Damit haben wir die Untersuchungen für solche Gerade f erledigt, welche mit den Leitlinien der betreffenden Kegelschnitte parallel sind und können zu den *allgemeinen* Fällen übergehen, bei welchen die Geraden f mit der Ebene der Kegelschnitte einen

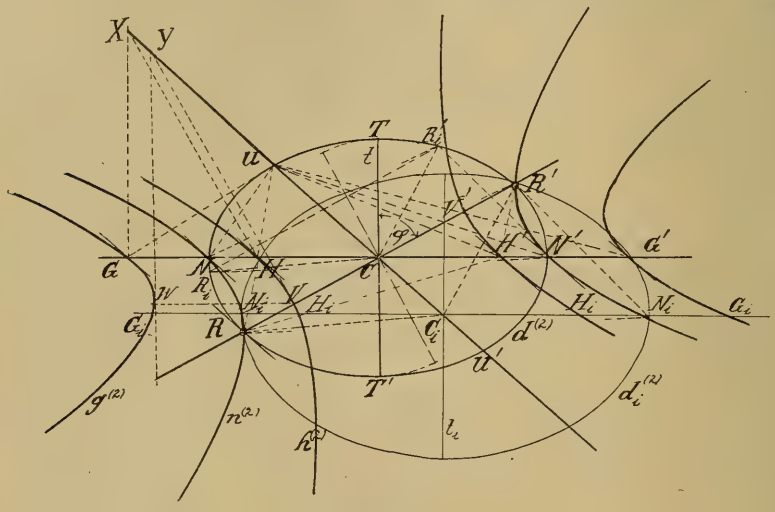


Fig. 5.

Winkel φ bilden und dabei zu der einen oder andern Achse des Kegelschnittes senkrecht stehen (4).*

10. In der Ebene δ nehmen wir eine Ellipse $d^{(2)}$ an (Fig. 5). Der Mittelpunkt, die Haupt- und Nebenachse, und ein

* Es sei hier noch ein direkter einfacher Beweis für solche Gerade f der in den Punkten 7—9 enthaltenen Sätze gegeben, welche in der Ebene des beliebigen Kegelschnitts $e^{(2)}$ liegen und zur Leitlinie desselben parallel sind. Dabei stützen wir uns auf folgenden bekannten Satz:

„Der Kegelschnitt $e^{(2)}$ wird aus einem beliebigen Punkte F seines Fokalkegelschnitts durch einen Rotationskegel $F \cdot e^{(2)}$ projiziert, dessen Rotationsachse die Tangente im Punkte F ist“

Es treffe die Normalebene ν des Fokalkegelschnittes im Punkte F,

Paar konjugierte Durchmesser derselben seien C; NN', TT'; RR', UU'.

In der Ebene δ kann man durch die Punkte RR' ∞^1 solche Ellipsen $d_i^{(2)}$ führen, welche mit $d^{(2)}$ ähnlich sind und ähnlich liegen; der Ort der Mittelpunkte C_i dieser Ellipsen ist der Durchmesser UU'. Zu einem auf UU' angenommenen Mittelpunkt C_i findet man die Hauptachse N_iN_i' der betreffenden Ellipse $d_i^{(2)}$ wie folgt: Wir führen durch C die Parallelen zu den Halbstrahlen C_iR, C_iR', welche $d^{(2)}$ in den Punkten R_i, R_i' treffen; die durch R und R' zu R_iN bezw. $R_i'N$ geführten Parallelen treffen sich in N_i, und die durch R' zu R_iN' bezw. R_iN geführten Parallelen treffen sich in N_i', und N_i, N_i' sind die Scheitelpunkte der Hauptachse der Ellipse $d_i^{(2)}$.

Es entspricht nämlich infolge der Ähnlichkeit und ähnlichen Lage der Felder der Ellipsen $d_i^{(2)}$ und $d^{(2)}$ dem Dreiecke $RR'C_i$ des Feldes $d_i^{(2)}$ das Dreieck $R_iR_i'C$ des Feldes $d^{(2)}$, und dem Viereck $NR_iR_i'N'$ dieses Feldes entspricht das Viereck $N_iRR'N_i'$

---

d. h. die in F zur Rotationsachse des Kegels $F\cdot e^{(2)}$ senkrechte Ebene, die Ebene ε des Kegelschnitts $e^{(2)}$ in der Geraden f; ferner seien A, B zwei beliebige Punkte von $e^{(2)}$, A_1 und B_1 die Fußpunkte der aus A und B auf f gefällten Lote und $(AB, f)\equiv C$.

Da die Gerade CF gleiche Neigung gegen die Kegelerzeugenden AF, BF hat, so ist in Anbetracht des Dreiecks ABF

$$AF : BF = AC : BC = AA_1 : BB_1$$

also

$$AF : AA_1 = BF : BB_1 = \text{const.},$$

was den ersten Teil obiger Sätze beweist.

Der zweite Teil ist unmittelbar ersichtlich, da die konjugierten Polaren des Rotationskegels $F^{(2)}$ in der zur Rotationsachse senkrechten Ebene $|Ff|$ eine orthogonale Involution bilden. Also:

Schneidet die Ebene ε einen Rotationskegel im Kegelschnitt $e^{(2)}$ und die im Scheitel F des Kegels zur Rotationsachse desselben senkrechte Ebene v in der Geraden f, so haben die Abstände der Punkte des $e^{(2)}$ von F und f ein konstantes Verhältnis.

Der Satz gilt auch allgemeiner, nämlich:

„Schneidet man einen Rotationskegel mit einer zur Achse senkrechten Ebene v im Kreise $n^{(2)}$ und mit einer andern Ebene ε im Kegelschnitte $e^{(2)}$, so ist das Verhältnis der Abstände der Punkte des Kegelschnittes von der Geraden $(v\varepsilon)\equiv f$ und von dem Kreise $n^{(2)}$ ein konstantes."

jenes Feldes, und daher wird, da NN' die Hauptachse von $d^{(2)}$ ist, N_iN_i' die Hauptachse von $d_i^{(2)}$ sein.

Verändert man den Punkt C_i auf dem Durchmesser UU', so verändert sich damit auch die mit RR' parallele Sehne R_iR_i', und die Punkte R_i, R_i' beschreiben projektive Reihen auf der Ellipse $d^{(2)}$. Die Strahlen NR_i, NR_i' beschreiben projektive Büschel, so auch die mit diesen parallelen Strahlen RN_i, $R'N_i$, und das Erzeugnis der letzteren, d. h. der Ort der Punkte N_i, ist ein Kegelschnitt $n^{(2)}$.

Dieser Kegelschnitt $n^{(2)}$ ist aber eine Hyperbel, denn wenn C_i der unendlich ferne Punkt von UU' ist, so zieht sich die entsprechende Sehne R_iR_i' von $d^{(2)}$ auf einen Punkt U (oder U') zusammen, und die durch R und R' zu NU (oder NU') parallel geführten Geraden treffen sich in dem einen unendlich fernen Punkte, während die zu $N'U$ Parallelen sich in dem andern unendlich fernen Punkte von $n^{(2)}$ treffen. Es gehen daher die Geraden NU, $N'U$ parallel zu den Asymptoten der Hyperbel $n^{(2)}$.

Diese Hyperbel $n^{(2)}$ geht durch die Punkte N, N', denn $d^{(2)}$ ist eine der Ellipsen $d_i^{(2)}$; NN' ist ein Durchmesser von $n^{(2)}$, denn die von NN' gleich abstehenden Sehnen N_iN_i' haben gleiche Länge. NN', UU' sind konjugierte Durchmesser von $n^{(2)}$, denn die mit den Asymptoten von $n^{(2)}$ parallelen NU, $N'U$ trennen harmonisch den Durchmesser UU' von dem unendlich fernen Punkt der Geraden NN'. Die Punkte U, U' sind konjugierte Pole in bezug auf $n^{(2)}$, denn die Seiten des Vierecks $NUN'U'$ gehen parallel zu den Asymptoten von $n^{(2)}$. Die Punkte R, R' liegen auf $n^{(2)}$, denn gelangt der Punkt R_i nach N, so gelangt N_i nach R. Auch sind RR', TT' konjugierte Durchmesser von $n^{(2)}$, denn die Tangente der Ellipse $d^{(2)}$ im Punkte U und die von U auf NN' gefällte Senkrechte trennen harmonisch die zu den Asymptoten von $n^{(2)}$ Parallelen NU, $N'U$. Die Punkte T, T' sind ebenfalls konjugierte Pole von $n^{(2)}$, denn die Seiten der Parallelogramme $RTR'T'$ und $NUN'U'$ gehen parallel.

Die Brennpunkte H_i, H_i' der Ellipsen $d_i^{(2)}$ liegen auf einer Hyperbel $h^{(2)}$, welche mit $n^{(2)}$ affin ist in bezug auf die Affinitätsachse UU'. Diese Hyperbel $h^{(2)}$ geht durch die Brennpunkte HH' von $d^{(2)}$, also entsprechen den konjugierten Durchmessern NN', UU'

von $n^{(2)}$ die konjugierten Durchmesser HH', UU'' von $h^{(2)}$, und daher sind die Asymptoten von $h^{(2)}$ parallel mit den Seiten des Parallelogramms $HUH'U'$.

Da die Tangente und die Normale des Punktes U der Ellipse $d^{(2)}$ die Winkel der Fahrstrahlen UH, UH' halbieren, so liegt die mit jener Tangente parallele Hauptachse VV'' von $h^{(2)}$ auf dem Durchmesser RR'. Und da die Geraden HR, HR' mit der Tangente von $h^{(2)}$ im Punkte R (welche mit UU'' parallel ist) gleiche Winkel bilden, und von der Hauptaxe der $h^{(2)}$ ein solches Stück RR' abschneiden, welches im Mittelpunkte C halbiert wird, so sind die Punkte R, R' die Brennpunkte von $h^{(2)}$. Die Ellipse $d^{(2)}$ und die Hyperbel $h^{(2)}$ haben daher die besondere gegenseitige Lage, daß jede durch die Brennpunkte der andern geht und daß die Tangenten in diesen Brennpunkten zum Durchmesser UU'' parallel sind.

Der Fußpunkt des vom Brennpunkte H auf die Tangente des Punktes R gefällten Lotes und der Fußpunkt des vom Brennpunkte R auf die Tangente des Punktes H gefällten Lotes hat vom gemeinsamen Mittelpunkt C einen Abstand gleich der halben Hauptache der Ellipse $d^{(2)}$ bezw. der halben Hauptachse der Hyperbel $h^{(2)}$. Das Produkt der vom Punkte H auf die Tangenten der Punkte R und R' gefällten Lote ist gleich dem Quadrate der halben Nebenachse von $d^{(2)}$ d. h. TC^2; während das Produkt der von den Brennpunkten R und R' auf die Tangente des Punktes H gefällten und mit jenen gleiche Lote gleich ist dem Quadrate der halben imaginären Achse der Hyperbel $h^{(2)}$. Daraus folgt, daß das Quadrat der halben Hauptachse der Hyperbel $h^{(2)}$ gleich ist

$$VC^2 = RC^2 - TC^2.$$

Die Leitlinien der Ellipsen $d_i^{(2)}$ treffen ihre Hauptachsen in den Punktpaaren G_iG_i', und der Ort dieser Punktpaare ist eine mit $n^{(2)}$ und $h^{(2)}$ in bezug auf die Affinitätsachse UU'' affine Hyperbel $g^{(2)}$. Diese enthält die Punkte GG', in welchen die Leitlinien der $d^{(2)}$ die Hauptachse derselben treffen, hat GG' UU'' zu konjugierten Durchmessern, und ihre Asymptoten sind mit den Seiten des Vierecks $GUG'U'$ parallel.

Die zum Brennpunkte H der Ellipse $d^{(2)}$ gehörige Leitlinie

trifft die Geraden UU', NN' in den Punkten X, G. HX steht senkrecht auf RR', denn die Polare des Punktes X in bezug auf $d^{(2)}$ ist senkrecht auf HX und parallel mit RR'. — In der Affinität der Hyperbeln $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ sind HX GX entsprechende Gerade; der mit HX parallelen Tangente im Scheitel V der Hyperbel $h^{(2)}$ entspricht die mit GX parallele Tangente der $g^{(2)}$ im Punkte W, welcher Punkt dem V entsprechend ist. Trifft daher das im Punkte V auf RR' errichtete Lot die Affinitätsachse UU' in Y, so schneidet das aus Y auf NN' gefällte Lot die durch V zu NN' parallel geführte Gerade im Punkte W der Hyperbel $g^{(2)}$, und YW ist die Tangente dieses Punktes.

Die Polare des Punktes Y in bezug auf $h^{(2)}$ ist WV, also ist YW, WV ein konjugiertes Polarenpaar, und da sie aufeinander senkrecht stehen, so sind sie von den Brennpunkten R, R' der $h^{(2)}$ harmonisch getrennt. Da YW parallel ist mit dem zu RR' konjugierten Durchmesser der $n^{(2)}$, so ist sie die Polare von V in bezug auf $n^{(2)}$. Ebenso ist die Polare des Punktes H in bezug auf $n^{(2)}$ eine Tangente von $g^{(2)}$, also sind die Hyperbeln $g^{(2)}$ und $h^{(2)}$ Polarfiguren von einander in bezug auf $n^{(2)}$.

Bezeichnet man die Hauptachse NN' von $d^{(2)}$ mit $2a$, die Nebenachse TT' mit $2\mathfrak{b}$, den Durchmesser RR' mit $2b$, den Komplementärwinkel des Neigungswinkels der letzteren mit φ, und wenn

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = a^2 - \mathfrak{b}^2, \quad m^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi,$$

so folgt aus der Gleichung

$$\frac{b^2 \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{\mathfrak{b}^2} = 1$$

der Ellipse $d^{(2)}$:

$$\mathfrak{b} = \frac{ab \cos \varphi}{m}, \quad m = a \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos \varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}.$$

Endlich ist das Verhältnis der Abstände der Punkte aller Ellipsen $d_i^{(2)}$ von ihren Brennpunkten und den dazu gehörigen Leitlinien $c : m$, oder was dasselbe ist $\mathfrak{c} : a$.

Die erhaltenen Resultate aber lauten:

„Ist NN' die Hauptachse, TT' die Nebenachse, RR', UU' ein konjugiertes Durchmesserpaar der Ellipse $d^{(2)}$, und treffen die zu ihren Brennpunkten H, H' gehörigen Leitlinien die Hauptachse

in den Punkten G, G', so liegen die Scheitelpunkte N_i, N_i', die Brennpunkte H_i, H_i', die Schnittpunkte G_i, G_i' der Leitlinien mit den Hauptachsen der zu $d^{(2)}$ ähnlichen und ähnlich liegenden und durch die Punkte R, R' gehenden Ellipsen $d_i^{(2)}$ bezw. auf den Hyperbeln $n^{(2)}, h^{(2)}, g^{(2)}$.

Die Punkte U, U' sind konjugierte Pole, die Gerade UU' ein Durchmesser und NN', HH', GG' der zu jenem konjugierte Durchmesser von $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$; es laufen daher die Asymptoten dieser Hyperbeln parallel mit den Seiten der Parallelogramme $NUN'U'$, $HUH'U'$, $GUG'U'$. Die Brennpunkte der Hyperbel $h^{(2)}$ sind R, R', und das Quadrat ihrer Nebenachse ist $-\overline{TT'}^2$.

Je zwei der drei Hyperbeln sind in bezug auf die Affinitätsachse UU' affin; die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte laufen mit NN' parallel; endlich sind $g^{(2)}$ und $h^{(2)}$ Polarfiguren voneinander in bezug auf die Hyperbel $n^{(2)}$."

Ferner:

Durch zwei Punkte der Ebene kann man ∞^1 Ellipsen führen, welche mit einer gegebenen Ellipse ähnlich und ähnlich liegend sind. Der Ort der Brennpunkte derselben ist eine Hyperbel, deren Brennpunkte die zwei angenommenen Punkte, deren Nebenachse zum Quadrate erhoben mit dem negativen Quadrate der Nebenachse der kleinsten jener ähnlichen Ellipsen gleich ist.

11. Drehen wir jetzt die obige Ellipse $d^{(2)}$ um die Nebenachse $TT' \equiv t$, sowie die übrigen Ellipsen $d_i^{(2)}$ um ihre Nebenachsen. $d^{(2)}$ beschreibt bei dieser Drehung ein Sferoid $D^{(2)}$, die $d_i^{(2)}$ aber beschreiben mit $D^{(2)}$ ähnliche und ähnlich liegende Sferoide $D_i^{(2)}$. Alle diese $D^{(2)}$ und $D_i^{(2)}$ Sferoide treffen sich in einer reellen Ellipse $e^{(2)}$ im Endlichen und in einem unendlich fernen imaginären Kegelschnitt. Die Ebene ε der $e^{(2)}$ steht senkrecht auf der Ebene δ der $d_i^{(2)}$, ihre Nebenachse $RR' = 2b$ bildet mit den Rotationsachsen jener Sferoide einen Winkel φ, endlich ist ihre Hauptachse SS' gleich $NN'(= 2a)$ und ihre Exzentrizität ist c.

Die Äquatoren der Sferoide $D_i^{(2)}$ liegen auf einem einschaligen Hyperboloid $N^{(2)}$, ihre Fokalkreise auf einem einschaligen Hyperboloid $H^{(2)}$, endlich die Schnittkreise der Leitzylinder mit den

bezüglichen Äquatorebenen auf einem einschaligen Hyperboloid $G^{(2)}$. Eine zyklische Durchmesserebene dieser Hyperboloide ist die Äquatorebene α von $D^{(2)}$, der zu α konjugierte Durchmesser für alle drei Flächen ist UU', und auf diesem sind U, U' konjugierte Pole.

Das Hyperboloid $N^{(2)}$ geht durch $e^{(2)}$, und TT' ist der zur Ebene ε von $e^{(2)}$ konjugierte Durchmesser. ε ist eine Hauptebene von $H^{(2)}$, und in dieser liegt die Hauptachse des elliptischen Hauptschnittes auf SS' und ist gleich mit HH'. Das Quadrat ihrer auf ε senkrechten Achse ist $-\overline{TT'}^2$, endlich ist $e^{(2)}$ die Fokalellipse der $H^{(2)}$.

Die Hyperboloide $G^{(2)}$ und $H^{(2)}$ sind Polargebilde voneinander in bezug auf $N^{(2)}$, denn von den mit α parallelen zyklischen Schnitten der Hyperboloide $G^{(2)}$, $H^{(2)}$ und $N^{(2)}$ sind die zwei ersteren Polargebilde voneinander in bezug auf den dritten, ferner haben die Ebenen aller dieser zyklischen Schnitte dieselben Pole in bezug auf die drei Hyperboloide auf dem zu α konjugierten Durchmesser UU'.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte jedes der Sferoide $D_i^{(2)}$ von einem Punkte des eigenen Fokalkreises und von der dazu gehörigen Leitlinie ist $c : m$, wenn $m^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi$.

Daraus folgt umgekehrt:

„Durch eine Ellipse $e^{(2)}$, deren Mittelpunkt C, deren Haupt- und Nebenachse $SS' = 2a$, $RR' = 2b$, und deren Exzentrizität c ist, gehen ∞^1 solche Sferoide $D_i^{(2)}$, deren Rotationsachsen zueinander parallel, zu SS' senkrecht sind und mit RR' den Winkel φ bilden. Diese haben eine gemeinsame durch RR' gehende und zu SS' senkrechte Meridianebene δ; in dieser sind die durch die Punkte R, R' gehenden Meridiane $d_i^{(2)}$ ähnlich und ähnlich liegend, und daher sind auch die Sferoide $D_i^{(2)}$ selbst ähnlich und ähnlich liegend. Der Punkt C ist der Mittelpunkt eines der Sferoide $D_i^{(2)}$, nämlich der von $D^{(2)}$; die Hauptachse des in δ liegenden Meridianes $d^{(2)}$ von $D^{(2)}$ ist $NN' = 2a$, seine Nebenachse $TT' = 2ab \cos \varphi : m$ (wenn $m^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi$); der Abstand seiner Brennpunkte H, H' ist $2ac : m$, und sein zu RR' konjugierter Durchmesser UU'.

Die Äquatoren, die Fokalkreise und die Schnittkreise der Leitzylinder mit den Äquatorebenen liegen bezüglich auf den ein-

schaligen Hyperboloiden $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$. Der Punkt C ist gemeinsamer Mittelpunkt, die Äquatorebene α von $D^{(2)}$ eine gemeinsame zyklische Ebene, UU'' der zu dieser konjugierte Durchmesser und auf diesem sind die Punkte U, U'' konjugierte Pole jener drei Hyperboloide; endlich sind $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$ Polargebilde in bezug auf das erste Hyperboloid $N^{(2)}$. Die Ebene ε ist eine Hauptebene von $H^{(2)}$, das Quadrat der auf dieser senkrechten Achse ist $-\overline{TC}^2$ und $e^{(2)}$ ist die Fokalellipse von $H^{(2)}$.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von einem beliebigen Punkte des Hyperboloids $H^{(2)}$, d. h. von einem Punkte des Fokalkreises eines der Sferoide $D_i^{(2)}$ und von der zu diesem Punkte gehörigen Leitlinie des bezüglichen Meridians ist $c : m$.

Verändert man den Winkel φ, so verändert sich auch das Büschel der Sferoide $D_i^{(2)}$, sowie das Hyperboloid $H^{(2)}$, welches der Träger der Fokalkreise der Sferoide der einzelnen Büschel ist; die $H^{(2)}$ beschreiben die ganze Schar derjenigen einschaligen Hyperboloide, welche $e^{(2)}$ zur Fokalellipse haben, und die Punkte der $H^{(2)}$ erfüllen daher den ganzen Raum.“

Daraus folgt:

Ist eine Ellipse $e^{(2)}$ und ein außerhalb ihrer Ebene liegender Punkt F gegeben, so kann man stets zwei zur Hauptachse der Ellipse senkrechte und zur Nebenachse unter einem gewissen Winkel φ sich neigende Gerade f und f', die in bezug auf die Ebene der $e^{(2)}$ Spiegelbilder voneinander sind, finden, welche die Eigenschaft haben, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ sowohl von F und f, wie auch von F und f' konstant, d. h. gleich $c : m$ ist, wo c und m aus der Hauptachse $2a$ und der Nebenachse $2b$ von $e^{(2)}$ mittels den Formeln $c^2 = a^2 - b^2$ und $m^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi$ zu berechnen ist. Die Geraden f und f' treffen die Ebene der Ellipse $e^{(2)}$ in einem außerhalb der Ellipse liegenden Punkte.

Umgekehrt:

Jede zur Hauptachse einer Ellipse $e^{(2)}$ senkrechte, zur Nebenachse unter einem Winkel φ sich neigende und die Ebene ε der $e^{(2)}$ außerhalb der $e^{(2)}$ schneidende Gerade f bestimmt zwei solche Punkte F und F', die in bezug auf ε Spiegelbilder voneinander sind und die Eigenschaft haben, daß das Verhältnis der Abstände

der Punkte der $e^{(2)}$ sowohl von F und f wie auch von F' und f ein konstantes ist.

Anmerkung. 1. Ist $\varphi = 0$, so ist die in dem obigen Satze erwähnte Ellipse $d^{(2)}$ eine Lage der um die Nebenachse RR' um 90^0 gedrehten Ellipse $e^{(2)}$; $e^{(2)}$ ist daher ein Meridian des Sferoids $D^{(2)}$.

Die Äquatoren der Sferoide $D_i^{(2)}$ liegen mit dem Äquator von $D^{(2)}$ in derselben Ebene δ und gehen durch die Scheitelpunkte S, S' von $e^{(2)}$. Das Hyperboloid $N^{(2)}$ verkümmert daher in derjenigen Ebene δ, welche auf die Nebenachse von $e^{(2)}$ im Mittelpunkte senkrecht steht.

Die Fokalkreise der Sferoide $D_i^{(2)}$ sind ebenfalls in der Ebene δ und umhüllen ausschließend die Fokalhyperbel $h^{(2)}$ der $e^{(2)}$. Das Hyperboloid $H^{(2)}$ verkümmert in demjenigen Teil der Ebene δ, welcher außerhalb $h^{(2)}$ liegt.

Die Schnittkreise der Leitzylinder der Sferoide $D_i^{(2)}$ mit der gemeinsamen Äquatorebene δ umhüllen einschließend eine Ellipse $f^{(2)}$. Das Hyperboloid $G^{(2)}$ verkümmert daher in dem außerhalb $f^{(2)}$ liegenden Teil der Ebene δ.

Alldies fanden wir schon früher unter (6) in einer andern Behandlung.

2. Ist $\varphi = 90^0$, so werden die Hyperboloide $N^{(2)}$, $H^{(2)}$, $G^{(2)}$ illusorisch, denn durch die Ellipse $e^{(2)}$ kann man kein solches Sferoid legen, dessen Rotationsachse auf der Ebene der $e^{(2)}$ senkrecht steht. Nimmt man aber anstatt der Ellipse $e^{(2)}$ einen Kreis an, so werden jene Hyperboloide unbestimmt.

12. Nehmen wir jetzt eine Hyperbel $d^{(2)}$ an (Fig. 6), deren Mittelpunkt C und deren Hauptachse NN' ist, auf deren Nebenachse die Potenzpunkte in T, T' liegen, deren Brennpunkte H, H' sind und deren Leitlinien die Hauptachse in den Punkten G, G' treffen. Durch die Endpunkte R, R' eines Durchmessers von $d^{(2)}$ führen wir zu $d^{(2)}$ ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln $d_i^{(2)}$ und suchen die Orte $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ bezw. ihrer Scheitelpunkte $N_i N_i'$, ihrer Brennpunkte $H_i H_i'$, endlich die der Schnittpunkte $G_i G_i'$ ihrer Leitlinien mit den Hauptachsen.

Zu dem Ende nehmen wir auf dem zu RR' konjugierten Durchmesser UU' einen Punkt C_i an und betrachten ihn als den Mittelpunkt einer der Hyperbeln $d_i^{(2)}$. Die zu den Halbstrahlen $C_i R$, $C_i R'$ durch C geführten Parallelen treffen $d^{(2)}$ in den Punkten $R_i R_i'$. Sind die Vierecke $RR'N_i N_i'$, $R_i R_i' NN'$ ähnlich und ähnlich liegend, so sind die Punkte N_i, N_i' schon Scheitelpunkte der Hyperbel $d_i^{(2)}$. Mit Veränderung des Punktes C_i auf UU' ändern sich auch die Punkte R_i, R_i' projektiv auf $d^{(2)}$, also die Strahlen NR_i, NR_i' projektiv um N, und daher ist das Erzeugnis der mit

den letzteren parallelen Strahlen RN_i, $R'N_i$, d. h. der Ort der Punkte N_i, ein Kegelschnitt $n^{(2)}$.

Fällt C_i in einen Potenzpunkt des Durchmessers UU', z. B. in U'', so werden die durch C mit RU'', $R'U''$ parallel geführten Geraden die Asymptoten von $d^{(2)}$, also sind die hierher gehörigen Punkte R_i, R_i' die unendlich fernen Punkte R_∞, R_∞' der $d^{(2)}$. Die zu $R_\infty N$ und $R_\infty' N$ durch R bezw. durch R' geführten Parallelen treffen sich in U'', daher ist dieser Punkt und ebenso der andere

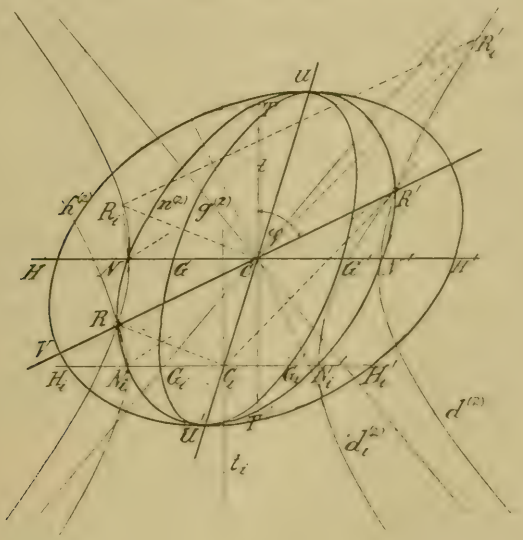


Fig. 6.

Potenzpunkt U ein Punkt des Kegelschnittes $n^{(2)}$. Nimmt man C_i außerhalb der endlichen Strecke UU'' auf der Geraden UU'' an, so treffen die durch C zu C_iR, C_iR' geführten Parallelen die Hyperbel $d^{(2)}$ nicht mehr in reellen Punkten, es hat daher keine der Hyperbeln $d_i^{(2)}$ ihren Mittelpunkt C_i außerhalb der endlichen Strecke UU'.

UU'', NN' bildet ein konjugiertes Durchmesserpaar des Kegelschnittes $n^{(2)}$, also ist $n^{(2)}$ eine Ellipse. Es sind folglich die mit $n^{(2)}$ in bezug auf die Affinitätsachse UU'' affinen Kegelschnitte $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ ebenfalls Ellipsen. HH', UU'' ist ein konjugiertes Durchmesserpaar von $h^{(2)}$; GG', UU' eines von $g^{(2)}$; dieselben ent

sprechen in der Affinität mit $n^{(2)}$ dem konjugierten Durchmesserpaar NN', UU' des letzteren.

Die Ellipse $n^{(2)}$ geht durch R, R', und der zu RR' konjugierte Durchmesser ist, wegen $NT \parallel RU$, TT'.

Die Ellipse $h^{(2)}$ geht durch die Brennpunkte H, H' von $d^{(2)}$, und ihre Tangenten in diesen Punkten sind parallel mit UU' sowie mit den Tangenten der $d^{(2)}$ in den Punkten RR', also neigen sich dieselben unter gleichen Winkeln zu den Seiten des Parallelogramms $RHR'H'$. Aus diesem Grunde sind RR' Brennpunkte der Ellipse $h^{(2)}$. Da schließlich jeder der Kegelschnitte $h^{(2)}$ und $d^{(2)}$ durch die Brennpunkte des andern geht und die Tangenten in diesen Punkten parallel sind, so ist die halbe Nebenachse von $h^{(2)}$ gleich mit TC, die halbe Hauptachse $VC = \sqrt{TC^2 + RC^2}$.

$h^{(2)}$, $g^{(2)}$ sind aus demselben Grunde wie früher Polargebilde voneinander in bezug auf $n^{(2)}$.

Bezeichnet man die Hauptachse NN' der Hyperbel $d^{(2)}$ mit $2b$, den Abstand der Potenzpunkte T, T' auf der Nebenache mit $2\mathfrak{a}$, den Durchmesser RR' mit $2a$, den Komplementärwinkel der letzteren mit φ, und ist

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \quad m_1^2 = a^2 \sin^2 \varphi - b^2,$$

so folgt aus der Gleichung

$$\frac{a^2 \sin^2 \varphi}{b^2} - \frac{a^2 \cos \varphi^2}{\mathfrak{a}^2} = 1$$

der Hyperbel $d^{(2)}$:

$$\mathfrak{a} = \frac{ab \cos \varphi}{m_1}, \quad m_1 = b \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos \varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}.$$

Endlich ist das Verhältnis der Abstände der Punkte der einzelnen Hyperbeln $d_i^{(2)}$ von ihren eigenen Brennpunkten und den dazu gehörigen Leitlinien ein konstantes, nämlich $c : m_1$ oder was dasselbe ist: $\mathfrak{c} : b$.

Von dem Gefundenen wollen wir nur folgendes hervorheben:

Nimmt man in einer Ebene eine Hyperbel und solche zwei Punkte an, deren Verbindungsgerade mit einem die Hyperbel in reellen Punkten schneidenden Durchmesser parallel ist, so ist der Ort der Brennpunkte der durch die zwei Punkte gehenden und mit

der Hyperbel ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln eine Ellipse. Die Brennpunkte dieser Ellipse sind die zwei angenommenen Punkte und das Quadrat ihrer halben Nebenachse ist gleich dem negativen Quadrat der halben Nebenachse der kleinsten jener Hyperbeln.

13. Dreht man obige Hyperbeln $d^{(2)}$ und $d_i^{(2)}$ um ihre Nebenachsen, so beschreiben sie solche ähnliche und ähnlich liegende einschalige Rotationshyperboloide $D^{(2)}$ und $D_i^{(2)}$, welche sich in einer Ellipse $e^{(2)}$ und in einem unendlich fernen Kegelschnitt treffen. Die Ebene ε der Ellipse steht senkrecht auf der Ebene δ der Hyperbeln, ihre Hauptachse $RR'\,(=2b)$ bildet einen Winkel φ mit den Rotationsachsen jener Hyperboloide, und ihre Nebenachse SS' ist gleich mit $NN'\,(=2a)$. Die Äquatoren, die Fokalkreise und Schnittkreise der Leitzylinder mit den Äquatorebenen liegen bezw. auf den Ellipsoiden $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$. Eine zyklische Durchmesserebene ist die Äquatorebene α von $D^{(2)}$, und auf dem zu dieser Ebene konjugierten Durchmesser sind U, U' Potenzpunkte, endlich sind in bezug auf $N^{(2)}$ die beiden Ellipsoide $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$ Polargebilde voneinander.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte eines beliebigen der Hyperboloide $D_i^{(2)}$ von einem Punkte seines Fokalkreises und von der zu dem Punkte gehörigen Leitlinie seines Meridians ist

$$\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2 \sin^2\varphi - b^2}.$$

Die $e^{(2)}$ ist die Fokalellipse desjenigen Ellipsoids $H^{(2)}$, welches die Fokalkreise der Hyperboloide $D^{(2)}$ und $D_i^{(2)}$ trägt.

Umgekehrt:

„Sind $2a$ und $2b$ die Achsen einer Ellipse $e^{(2)}$ und ist $\sin\varphi > \frac{a}{b}$, so kann man stets durch $e^{(2)}$ solche ähnliche und ähnlich liegende einschalige Rotationshyperboloide führen, deren Rotationsachsen mit der Hauptachse von $e^{(2)}$ den Winkel φ bilden und auf der Nebenachse senkrecht stehen. Der Ort der Fokalkreise dieser Hyperboloide ist ein solches Ellipsoid $H^{(2)}$, dessen Fokalellipse mit $e^{(2)}$ zusammenfällt. Bei Veränderung des Winkels φ beschreibt $H^{(2)}$ die ganze Schar derjenigen Ellipsoide, deren Fokalellipse $e^{(2)}$ ist, und die Punkte dieser Ellipsoide erfüllen daher den ganzen Raum."

Also:

Ist der Punkt F und die Ellipse $e^{(2)}$ mit den Haupt- und Nebenachsen $2a$ und $2b$ gegeben, so kann man stets zwei solche zur Nebenachse der $e^{(2)}$ senkrechte und zur Hauptachse unter einem gewissen Winkel φ sich neigende Geraden f und f' finden, die in bezug auf die Ebene der $e^{(2)}$ Spiegelbilder voneinander sind und die Eigenschaft haben, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte

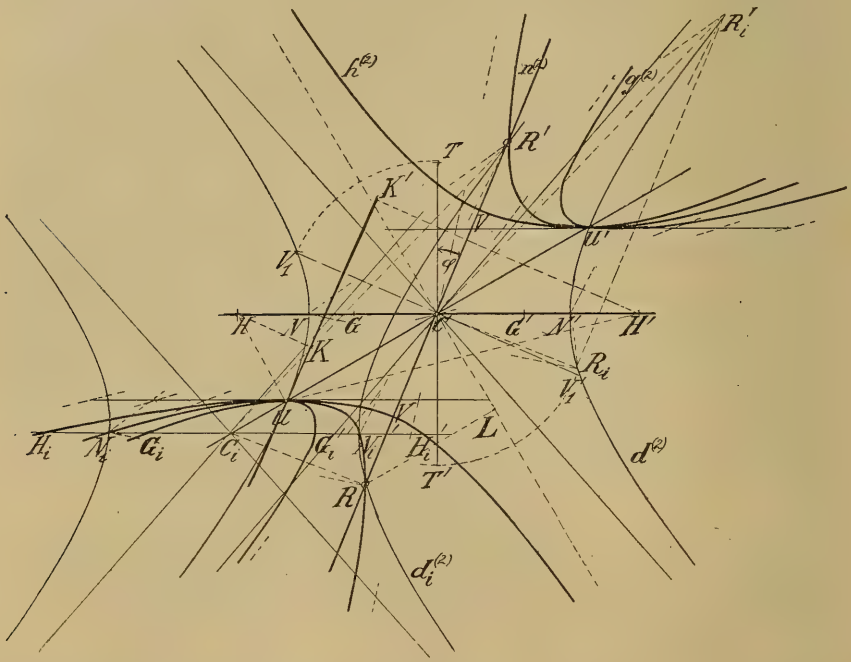


Fig. 7.

der Ellipse $e^{(2)}$ sowohl von F und f, wie auch von F und f' gleich ist

$$\sqrt{a^2 - b^2} : \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - b^2}.$$

Diese Geraden f und f' treffen die Ebene der $e^{(2)}$ in einem außerhalb der Ellipse $e^{(2)}$ liegendem Punkte.

14. Nehmen wir wieder eine Hyperbel $d^{(2)}$ an (Fig. 7), deren Mittelpunkt C und deren Hauptachse NN' ist, auf deren Nebenachse die Potenzpunkte in T, T' liegen, deren Brennpunkte H, H' sind und deren Leitlinien die Hauptachse in den Punkten G, G'

treffen. Ein konjugiertes Durchmesserpaar dieser Hyperbel sei RR', UU''; auf dem ersteren seien R, R' Potenzpunkte, auf dem letzteren aber UU' Hyperbelpunkte.

Durch die Punkte R, R' führen wir mit $d^{(2)}$ ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln $d_i^{(2)}$, und suchen die Orte $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ bezw. der Scheitelpunkte N_i, N_i', der Brennpunkte H_i, H_i' und der Schnittpunkte G_i, G_i' der Leitlinien mit den Hauptachsen dieser ähnlichen Hyperbeln $d_i^{(2)}$.

Zu dem Ende nehmen wir auf dem Durchmesser UU' außerhalb der endlichen Strecke UU'' den Punkt C_i an, und betrachten ihn als Mittelpunkt einer der Hyperbeln $d_i^{(2)}$. Die zu den Halbstrahlen C_iR, C_iR' durch C geführten Parallelen treffen $d^{(2)}$ in R_i, R_i', und die Eckpunkte N_i, N_i' des mit dem Vierecke $R_iR_i'NN'$ ähnlichen und ähnlich liegenden Viereckes $RR'N_iN_i'$ sind die Scheitelpunkte von $d_i^{(2)}$. Diese Punkte N_i, N_i' liegen aus gleichen Gründen wie oben auf einem Kegelschnitt $n^{(2)}$, welcher im gegenwärtigen Falle eine Hyperbel ist. Der Mittelpunkt von $n^{(2)}$ ist C, seine Asymptoten laufen parallel den Seiten des Parallelogramms $NUN'U'$, und UU', NN' sowie RR', TT' sind konjugierte Durchmesser von $n^{(2)}$. Die Punktpaare U, U'' und R, R' sind reelle Punkte der $n^{(2)}$, die Punktpaare N, N' und T, T' sind Potenzpunkte auf jenen Durchmessern. Zwei von den Hyperbeln $d_i^{(2)}$ gehen in ihre Asymptoten über, nämlich diejenigen, deren Mittelpunkte in U und U'' liegen. Auf der endlichen Strecke UU'' haben die Hyperbeln $d_i^{(2)}$ keine Mittelpunkte.

$h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ sind in bezug auf die Affinitätsachse UU' mit $n^{(2)}$ affine Hyperbeln; UU'' ist ein Durchmesser derselben, und auf den zu diesen konjugierten Durchmesser sind H, H' bezw. G, G' Potenzpunkte. Auch sind $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ Polargebilde voneinander in bezug auf $n^{(2)}$.

Die Asymptoten der $h^{(2)}$ laufen mit den Geraden UH, UH' parallel, welche die zum Punkte U der $d^{(2)}$ gehörigen Fahrstrahlen sind. Die Winkelhalbierende des Winkels HUH' ist die Tangente von $d^{(2)}$ und läuft parallel zu RR', also ist RR' die Hauptachse von $h^{(2)}$. Andererseits sind RU, $R'U$ parallel zu den Asymptoten von $d^{(2)}$ (denn RR', UU'' sind konjugierte Durchmesser von $d^{(2)}$), und die Tangente von $h^{(2)}$ in U ist parallel zur

Hauptachse von $d^{(2)}$, welche einen Winkel ihrer Asymptoten halbiert; diese Tangente halbiert daher den Winkel RUR', und somit sind R, R' die Brennpunkte von $h^{(2)}$.

Sind K und K' die Fußpunkte der von den Brennpunkten H und H' auf die Tangente des Punktes U der Hyperbel $d^{(2)}$ gefällten Lote, und ist L der Fußpunkt des vom Brennpunkte R der Hyperbel $h^{(2)}$ auf eine ihrer Asymptoten gefällten Lotes, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke UHK, $UH'K'$, CRL, daß

$$HU : HK = H'U : H'K' = CR : RL.$$

Aber das Produkt der zu dem Punkte U laufenden Fahrstrahlen HU, $H'U$ der Hyperbel $d^{(2)}$ ist gleich $\overline{CR}^2$, also wird wegen obiger Proportion auch

$$HK \cdot H'K' = \overline{RL}^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet das negative Quadrat der halben Nebenachse der $d^{(2)}$, die rechte Seite aber das negative Quadrat der halben Nebenachse der $h^{(2)}$, also sind die Nebenachsen beider Hyperbeln auch in diesem Falle gleich. Die halbe Hauptachse der Hyperbel $h^{(2)}$ ist

$$VC = \sqrt{\overline{RC}^2 - \overline{TC}^2}.$$

Bezeichnet man die Hauptachse NN' der Hyperbel $d^{(2)}$ mit $2b$, den Abstand der Potenzpunkte T, T' auf ihrer Nebenachse mit $2\mathfrak{a}$, den Abstand der Potenzpunkte R, R' mit $2a$, den Komplementärwinkel des Neigungswinkels der Durchmesser NN', RR' mit φ, und ist

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \quad m_2{}^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2,$$

so folgt aus der Gleichung

$$-\frac{a^2 \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{a^2 \cos^2\varphi}{\mathfrak{a}^2} = 1$$

der zu $d^{(2)}$ konjugierten Hyperbel:

$$\mathfrak{a} = \frac{ab\cos\varphi}{m_2}, \quad m_2 = b \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}.$$

Endlich ist das Verhältnis der Abstände der Punkte jeder der Hyperbeln $d_i^{(2)}$ von einem der eigenen Brennpunkte und der dazu gehörigen Leitlinie gleich $c : m_2$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{c} : b$.

Wir haben daher folgendes Resultat:

Nimmt man in einer Ebene eine Hyperbel und zwei solche Punkte an, deren Verbindungsgerade mit einem die Hyperbel in imaginären Punkten schneidenden Durchmesser parallel ist, so ist der Ort der Brennpunkte der mit jener Hyperbel ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln ebenfalls eine Hyperbel. Die Brennpunkte der letzteren Hyperbel fallen in die angenommenen Punkte, ihre Nebenachse aber ist gleich der Nebenachse derjenigen dem Büschel jener ähnlichen Hyperbel angehörigen Hyperbel, deren Potenzpunkte auf einem ihrer Durchmesser ebenfalls die zwei angenommenen Punkte sind.

15. Dreht man die Hyperbeln $d_i^{(2)}$ um ihre Nebenachsen, so beschreiben sie ein Büschel von ähnlichen und ähnlich liegenden einschaligen Rotationshyperboloiden $D_i^{(2)}$, welche sich in einer Hyperbel $e^{(2)}$ und in einem unendlich fernen Kegelschnitt schneiden. Die Ebene ε der Hyperbel $e^{(2)}$ steht senkrecht auf der Ebene δ der Hyperbeln $d_i^{(2)}$, ihre Hauptachse $RR'(2a)$ bildet einen Winkel φ mit den Rotationsachsen der Hyperboloide $D_i^{(2)}$, ihre Nebenachse SS' ist gleich $NN'(2b)$.

Die Äquatoren, die Fokalkreise und die Schnittkreise der Leitzylinder mit den bezüglichen Äquatorenebenen der Hyperboloide $D_i^{(2)}$ liegen bezw. auf den zweischaligen Hyperboloiden $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$. Ein gemeinsamer Durchmesser der letzteren ist UU', die zu diesem konjugierte Durchmesserebene ist zu den Äquatorebenen der $D_i^{(2)}$ parallel. Auch sind $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$ Polargebilde voneinander in bezug auf $N^{(2)}$.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte eines beliebigen der Hyperboloide $D_i^{(2)}$ von einem Punkte des eigenen Fokalkreises und von der Leitlinie des betreffenden Meridians ist gleich

$$\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2}.$$

$e^{(2)}$ ist die Fokalhyperbel desjenigen zweischaligen Hyperboloids $H^{(2)}$, welches der Träger der Fokalkreise jener Rotationshyperboloide $D_i^{(2)}$ ist.

Umgekehrt:

„Ist die Hyperbel $e^{(2)}$ gegeben, so kann man stets durch sie ein Büschel von solchen ähnlichen und ähnlich liegenden ein-

schaligen Rotationshyperboloiden führen, deren Rotationsachsen mit der Hauptachse von $e^{(2)}$ einen Winkel φ bilden und auf der Nebenachse derselben senkrecht stehen. Der Ort der Fokalkreise der letzteren ist ein solches zweischaliges Hyperboloid $H^{(2)}$, dessen Fokalhyperbel mit $e^{(2)}$ zusammenfällt. Mit Veränderung des Winkels φ beschreibt $H^{(2)}$ die ganze Schar, und deren Punkte erfüllen den ganzen Raum."

Daher:

Ist der Punkt F und eine Hyperbel $e^{(2)}$ mit den Haupt- und Nebenachsen $2a$ und $2b$ gegeben, so kann man stets zwei zur Nebenachse der $e^{(2)}$ senkrecht stehende und zur Hauptachse unter einem gewissen Winkel φ sich neigende Geraden f und f' so finden, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte $e^{(2)}$ sowohl von F und f, wie auch von F und f' gleich sei: $\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2}$. Die Geraden f und f' sind Spiegelbilder voneinander in bezug auf die Ebene von $e^{(2)}$ und treffen diese Ebene in einem innerhalb der Hyperbel $e^{(2)}$ liegenden Punkte.

16. Konstruieren wir jetzt die zur unter 14 angenommenen Hyperbel $d^{(2)}$ ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln $d_i^{(2)}$, welche durch die konjugiert-imaginären Schnittpunkte der Hyperbel $d^{(2)}$ und des Durchmessers RR' gehen (Fig. 8), und suchen wir die Orte $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ ihrer Scheitelpunkte N_i, N_i', ihrer Brennpunkte H_i, H_i' und der Schnittpunkte G_i, G_i' ihrer Leitlinien mit den betreffenden Hauptachsen.

Zu dem Ende nehmen wir auf dem zu RR' konjugierten Durchmesser UU' einen Punkt C_i an und führen Parallele CR_i, CR_i' durch C zu den Halbstrahlen C_iR, C_iR'. Diese treffen diejenige Ellipse $\bar{d}^{(2)}$, deren konjugierte Durchmesser UU', RR' sind, und welche die sogenannte imaginäre Projektion von $d^{(2)}$ ist* in den Punkten R_iR_i'. Die Eckpunkte N_i, N_i' des mit dem Viereck $R_iR_i'NN'$ ähnlichen und ähnlich liegenden Viereckes $RR'N_iN_i'$ sind die Scheitelpunkte der Hyperbel $d_i^{(2)}$. Diese liegen auf derjenigen Hyperbel $n^{(2)}$, von der NN', UU' und TT', RR' konjugierte Durchmesser und auf den letzteren U, U' und R, R' Potenzpunkte sind.

---

* C. Wiener, Darstellende Geometrie. Bd. I, S. 315.

$h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ sind mit $n^{(2)}$ in bezug auf die Affinitätsachse UU' affine Hyperbeln und Polartiguren voneinander in bezug auf $n^{(2)}$. HH', UU' und GG', UU' sind bezw. konjugierte Durchmesser derselben und U, U'' Potenzpunkte auf diesem Durchmesser. Die zum Punkte U der Hyperbel $d^{(2)}$ gehörigen Fahrstrahlen sind zu den Asymptoten von $h^{(2)}$ parallel, also ist RR',

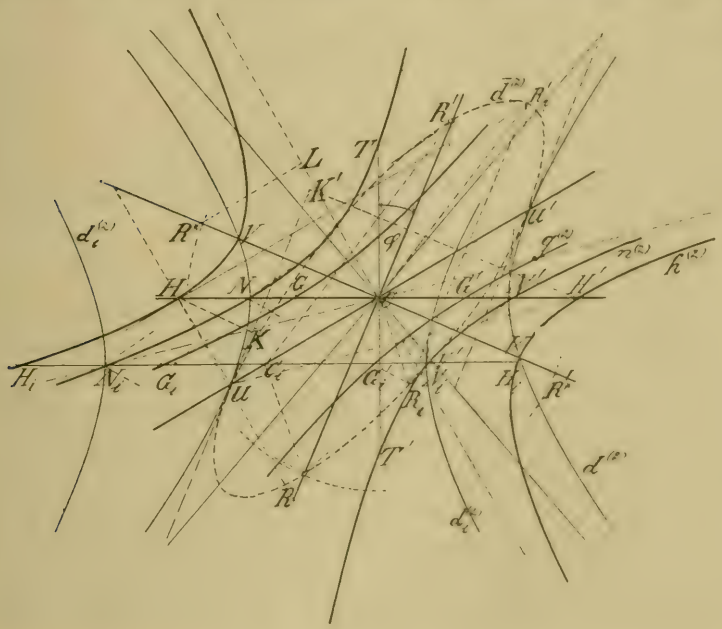


Fig. 8.

welche mit der Winkelhalbierenden des Winkels HUH' parallel läuft, die Nebenachse von $h^{(2)}$.

Die Tangente und Normale des Punktes H der Hyperbel $h^{(2)}$ trifft die Gerade RR' in konjugierten Polen in bezug auf $d^{(2)}$, denn der Treffpunkt der Normalen ist der Pol der Tangenten; und das Produkt der Abstände dieser Treffpunkte von C ist gleich CR^2. Auch trifft die Tangente und Normale des Punktes H die Hauptachse der $h^{(2)}$, welche im Punkte C auf RR' senkrecht steht, in solchen zwei Punkten, deren Abstände von C das Produkt CR^2 geben. Aber die letzteren Treffpunkte sind von den

Brennpunkten R^*, $R^{*\prime}$ der Hyperbel $h^{(2)}$ harmonisch getrennt, und es haben deshalb die Brennpunkte der Hyperbel $h^{(2)}$ den Abstand CR vom Punkte C.

Bezeichnet man auch hier die Fußpunkte der von den Brennpunkten H, H' der Hyperbel $h^{(2)}$ auf die Tangente des Punktes U gefällten Lote mit K, K' und den Fußpunkt des vom Brennpunkt R^* der Hyperbel $h^{(2)}$ auf eine ihrer Asymptoten gefällten Lotes mit L, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$UHK, \quad UH'K', \quad R^*CL$$

die Proportion

$$UH : HK = UH' : H'K' = R^*C : CL.$$

Das Produkt der Fahrstrahlen UH, UH' der Hyperbel $d^{(2)}$ ist gleich $\overline{RC}^2 = \overline{R^*C}^2$, also ist

$$HK \cdot H'K' = \overline{CL}^2,$$

und weil die linke Seite dieser Gleichung absolut genommen mit dem Quadrate der halben Nebenachse der Hyperbel $d^{(2)}$, die rechte Seite aber mit dem Quadrate der halben Hauptachse der Hyperbel $h^{(2)}$ gleich ist, so ist die Hauptachse VV' der $h^{(2)}$ gleich mit dem Abstande der Potenzpunkte T, T' auf der Nebenachse der $d^{(2)}$.

Bezeichnet man die Hauptachse NN' der Hyperbel $d^{(2)}$ mit $2a$, den Abstand der Potenzpunkte T, T' auf der Nebenachse mit $2\mathfrak{b}$, den Abstand der Potenzpunkte R, R' mit $2b$, den Komplementärwinkel des Neigungswinkels der Geraden NN', RR' mit φ, und ist

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = a^2 + \mathfrak{b}^2, \quad m_3^2 = a^2 + b^2 \sin^2\varphi,$$

so folgt wie oben aus der Gleichung der Hyperbel $d^{(2)}$:

$$\mathfrak{b} = TC = VC = \frac{ab\cos\varphi}{m_3}, \quad m_3 = a \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}.$$

Endlich ist das Verhältnis der Abstände der Punkte jeder der Hyperbeln $d_i^{(2)}$ von einem ihrer Brennpunkte und von der zugehörigen Leitlinie gleich $c : m_3$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{c} : a$.

Daher:

Legt man durch die imaginären Doppelpunkte der durch ihre Potenzpunkte R, R' gegebenen elliptischen Involution das Büschel

ähnlicher und ähnlich liegender Hyperbeln, so ist der Ort der Brennpunkte derselben ebenfalls eine Hyperbel. Der Mittelpunkt der letzteren fällt in den Mittelpunkt der Involution, ihre Hauptachse steht senkrecht auf dem Träger der Involution, und die Länge dieser Hauptachse ist gleich dem Abstande der Potenzpunkte auf der Nebenachse der kleinsten Hyperbel jenes Büschels.

17. Die Hyperbeln $d^{(2)}$ und $d_i^{(2)}$ beschreiben, wenn man sie um ihre Nebenachsen dreht, ein Büschel von ähnlichen und ähnlich liegenden, einschaligen Rotationshyperboloiden $D^{(2)}$ und $D_i^{(2)}$, welche sich in einer Hyperbel $e^{(2)}$ im Endlichen und in einem unendlich fernen Kegelschnitt schneiden. Die Ebene ε der $e^{(2)}$ steht senkrecht auf der Ebene δ der Hyperbeln $d^{(2)}$ und $d_i^{(2)}$, ihre Nebenachse $RR'(=2b)$ bildet mit den Rotationsachsen der Hyperboloide einen Winkel φ, ihre Hauptachse SS' ist gleich mit $NN'(=2a)$.

Die Orte der Äquatoren, der Fokalkreise und der Schnittkreise der Leitzylinder mit den Äquatorebenen sind bezw. die einschaligen Hyperboloide $N^{(2)}$, $H^{(2)}$, $G^{(2)}$. Die Punkte U, U' sind gemeinsame Potenzpunkte auf einem Durchmesser derselben, die zu diesem konjugierte zyklische Durchmesserebene ist die Äquatorebene von $D^{(2)}$. Auch sind $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$ Polargebilde voneinander in bezug auf $N^{(2)}$.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte irgend eines Hyperboloids $D_i^{(2)}$ von einem Punkte seines Fokalkreises und von der zugehörigen Leitlinie des entsprechenden Meridians ist

$$\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2+b^2\sin^2\varphi}\,.$$

$e^{(2)}$ ist auch hier die Fokalhyperbel desjenigen Hyperboloids $H^{(2)}$, welches der Träger der Fokalkreise der Hyperboloide $D_i^{(2)}$ ist.

Auch umgekehrt:

„Durch eine Hyperbel $e^{(2)}$ kann man stets ein solches Büschel von ähnlichen und ähnlich liegenden, einschaligen Rotationshyperboloiden führen, deren Rotationsachsen mit der Nebenachse von $e^{(2)}$ einen Winkel φ bilden und auf der Hauptachse derselben senkrecht stehen. Der Träger der Fokalkreise der Hyperboloide des Büschels ist ein einschaliges Hyperboloid $H^{(2)}$, dessen Fokal-

hyperbel mit $e^{(2)}$ koinzidiert. Mit Veränderung des Winkels φ verändert sich auch $H^{(2)}$ und beschreibt die ganze Schar der einschaligen Hyperboloide, deren Fokalhyperbel $e^{(2)}$ ist, und die Punkte derselben erfüllen daher den ganzen Raum."

Daher:

Nimmt man einen Punkt F und eine Hyperbel $e^{(2)}$ an, deren Haupt- und Nebenachse $2a$ und $2b$ ist, so kann man stets zwei solche auf der Hauptachse der $e^{(2)}$ senkrechte und zur Nebenachse unter einem Winkel φ sich neigende Geraden f und f' finden, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ sowohl von F und f, wie auch von F und f' ein konstantes, nämlich

$$\sqrt{a^2 + b^2} : \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi}$$

sei.

Diese Geraden f und f' sind Spiegelbilder voneinander in bezug auf die Ebene der $e^{(2)}$ und treffen diese Ebene in einem außerhalb der Hyperbel $e^{(2)}$ liegenden Punkte.

18. Es sei endlich RR' eine zur Asymptote UU' parallele Sehne der Hyperbel $d^{(2)}$ (Fig. 9), welche $d^{(2)}$ in dem im Endlichen liegenden Punkte R und in dem unendlich fernen Punkte $R' \equiv U'$ trifft. Suchen wir wieder die Orte $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$, welche die Scheitelpunkte N_i, N_i', die Brennpunkte H_i, H_i' bezw. die Schnittpunkte G_i, G_i' der Leitlinien mit den Hauptachsen der durch die beiden Punkte R, R' gehenden, die Asymptote UU' berührenden und mit $d^{(2)}$ ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln $d_i^{(2)}$ enthalten.

Zu dem Ende nehmen wir auf demjenigen Aste der Hyperbel $d^{(2)}$, auf welchem der Punkt R liegt, einen Punkt R_i an und konstruieren ein mit dem Dreiecke $R_i NN'$ ähnliches und ähnlich liegendes Dreieck RN_iN_i'; die Eckpunkte N_i, N_i' desselben sind schon die Scheitelpunkte N_i, N_i' der Hyperbel $d_i^{(2)}$. Auf der Geraden N_iN_i' liegen auch die Punkte H_i, H_i' und G_i, G_i'.

Ist R_i der unendlich ferne Punkt der anderen Asymptote U_1U_1' der Hyperbel $d^{(2)}$, so verkümmert $d_i^{(2)}$ in ihren Asymptoten UIU', RI so, daß der Treffpunkt I der letzteren ebenfalls ein Punkt ist von $n^{(2)}$. Auch R und R' sind Punkte der $n^{(2)}$, also sind sowohl $n^{(2)}$ wie auch die mit $n^{(2)}$ in bezug auf die Affinitätsachse UU' affinen Kurven $h^{(2)}$ und $g^{(2)}$ solche Parabeln, deren

Achsen mit UU' parallel sind und deren gemeinsame Tangente im Punkte I zu NN' parallel läuft.

Die Tangenten dieser Parabeln in den Punkten N, N'; H, H' und G, G' treffen sich in demjenigen Punkte J der Asymptote UU', welcher in bezug auf I symmetrisch ist zu C. In diesem Punkte J trifft auch die Tangente des Punktes R der Hyperbel $d^{(2)}$ die Asymptote UU', da $RI \parallel U_1U_1'$.

Der dem Dreieck JHH' umschriebene Kreis z geht durch

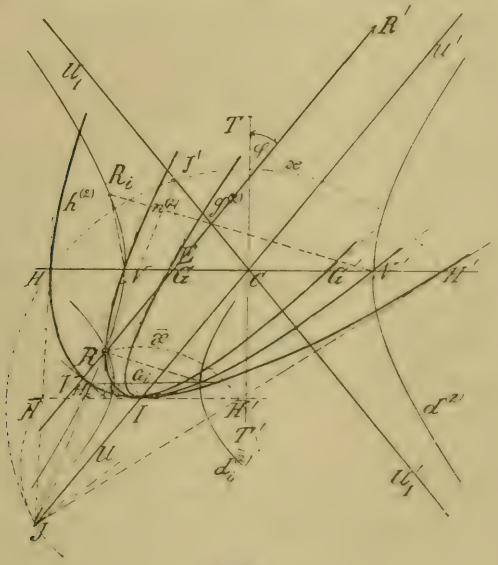


Fig. 9.

denjenigen Punkt J', in welchem die Tangente JR die Asymptote U_1U_1' trifft. Der Kreis $\bar{z}$ aber, welcher dem von den Tangenten der Parabel $h^{(2)}$ in den Punkten H, H', I gebildeten Dreieck $\overline{HH'J}$ umschrieben ist, ist halb so groß als z und liegt mit diesem in bezug auf den Ähnlichkeitspunkt J ähnlich; daher geht $\bar{z}$ durch den Punkt R. Der Brennpunkt der Parabel $h^{(2)}$ liegt auf z, und weil die Winkel JRH und JRH' gleich sind, so ist R dieser Brennpunkt.

Bezeichnet man den Neigungswinkel der Nebenachse TT' der Hyperbel $d^{(2)}$ und der Asymptote UU' mit φ, den Scheitel

der Parabel $h^{(2)}$ mit V, den Treffpunkt der Hauptachse von $d^{(2)}$ und der Geraden RR' mit E, und die Strecke CE mit r, so ist

$$RV = s = \frac{r}{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{cotg}\varphi,$$

denn der Fußpunkt des vom Brennpunkte R der Parabel $h^{(2)}$ auf die Tangente des Punktes I gefällten Lotes liegt in der Scheiteltangente derselben.

Daher:

Führt man durch den Punkt R solche ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln, deren eine Asymptote die Gerade UU' ist und deren Nebenachsen mit UU' den Winkel φ bilden, so ist der Ort der Brennpunkte dieser Hyperbeln eine Parabel $h^{(2)}$. R ist der Brennpunkt dieser Parabel, die Achse derselben läuft parallel mit UU', der Abstand seines Scheitels V vom Brennpunkte R ist $s = \frac{r}{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{cotg}\varphi$, wenn r den Abstand des Punktes R von demjenigen Punkte bedeutet, in welchem die Gerade UU' von der durch R gehenden und zur Hauptachse der Hyperbeln parallelen Geraden getroffen wird.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperbeln von irgend einem ihrer eigenen Brennpunkte und von der dazu gehörigen Leitlinie ist

$$1 : \sin\varphi.$$

19. Drehen wir wieder die Hyperbeln $d^{(2)}$ und $d_i^{(2)}$ um ihre Nebenachsen. Die so beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden, einschaligen Rotationshyperboloide $D^{(2)}$ und $D_i^{(2)}$ treffen sich in einem unendlich fernen Kegelschnitt und in einer im Endlichen liegenden Parabel $e^{(2)}$. Die Ebene ε der letzteren steht auf die Ebene δ der Hyperbeln $d^{(2)}$ und $d_i^{(2)}$ senkrecht, ihr Scheitel ist R, und ihre Achse RR' bildet mit den Rotationsachsen der Hyperboloide einen Winkel φ.

Die Orte der Äquatoren, der Fokalkreise und der Schnittkreise der Leitzylinder mit den bezüglichen Äquatorebenen sind bezw. die elliptischen Paraboloide $N^{(2)}$, $H^{(2)}$, $G^{(2)}$. Diese haben im Punkte I der Asymptote UU' eine gemeinsame Tangentialebene, welche parallel läuft mit den Äquatorebenen der Hyperboloide $D_i^{(2)}$, und zu dieser Tangentialebene ist die Asymptote UU' der kon-

jugierte Durchmesser für alle drei Flächen. Auch sind $H^{(2)}$ und $G^{(2)}$ Polargebilde voneinander in bezug auf $N^{(2)}$.

Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperboloide $D_i^{(2)}$ von einem Punkte des eigenen Fokalkreises und von der Leitlinie des betreffenden Meridians ist gleich $1 : \sin\varphi$.

$c^{(2)}$ ist auch gegenwärtig die Fokalparabel desjenigen elliptischen Paraboloids $H^{(2)}$, welches der Träger der Fokalkreise jener Hyperboloide $D_i^{(2)}$ ist.

Substituiert man nämlich die Koordinaten

$$x = RE \cdot \sin\varphi + r, \quad y = RE \cdot \cos\varphi$$

in die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2 \sin^2\varphi} - \frac{y^2}{c^2 \cos^2\varphi} = 1$$

der Hyperbel $d^{(2)}$, so erhält man für RE den Wert

$$RE = \frac{c^2 \sin^2\varphi - r^2}{2 \sin\varphi},$$

wo c die Exzentrizität der Hyperbel $h^{(2)}$ bedeutet.

Das Quadrat der zur Abszisse RE der Parabel $c^{(2)}$ gehörigen Ordinate ist $c^2 \sin^2\varphi - r^2$, während das Quadrat der zur Abszisse VE des zweiten Hauptschnittes $h_1^{(2)}$ des Paraboloids $H^{(2)}$ gehörigen Ordinate $c^2 - m^2$ ist.

Bezeichnet man nun den Abstand des Brennpunktes R der Parabel $c^{(2)}$ vom Scheitel mit p, den Abstand des Brennpunktes der Parabel $h_1^{(2)}$ vom Scheitel V mit q, so ist

$$c^2 \sin^2\varphi - r^2 = 4p \cdot \frac{c^2 \sin^2\varphi - r^2}{2r \sin\varphi},$$

$$c^2 - m^2 = 4q \cdot \left(\frac{c^2 \sin^2\varphi - r^2}{2r \sin\varphi} + \frac{r}{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{cotg}\varphi\right),$$

aus welchen Gleichungen sich

$$p = \frac{r}{2} \sin\varphi,$$

$$q = \frac{r}{2 \sin\varphi} = \frac{r}{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{cotg}\varphi + \frac{r}{2} \sin\varphi = s + p$$

und

$$\sin^2\varphi = \frac{p}{s+p}$$

ergibt.

Es haben daher die Parabeln $h^{(2)}$ und $h_1^{(2)}$ einen gemeinsamen Brennpunkt; der Brennpunkt (R) der Parabel $h^{(2)}$ ist der Scheitel der $e^{(2)}$, also ist in der Tat $e^{(2)}$ die Fokalparabel des elliptischen Paraboloids $H^{(2)}$.

Umgekehrt:

Durch die Parabel $e^{(2)}$ kann man stets ein Büschel solcher ähnlicher und ähnlich liegender, einschaliger Rotationshyperboloide legen, deren Rotationsachsen mit der Achse von $e^{(2)}$ einen Winkel φ bilden. Der Träger der Fokalkreise dieser Hyperboloide ist ein elliptisches Paraboloid, dessen eine Fokalparabel mit $e^{(2)}$ koinzidiert. Mit Veränderung des Winkels φ ändern sich auch die Paraboloide und beschreiben eine konfokale Schar, deren Punkte den ganzen Raum erfüllen.

Daher:

Nimmt man einen Punkt F und eine Parabel $e^{(2)}$ an, so kann man stets zwei auf die Leitlinie der $e^{(2)}$ senkrechte und zur Achse derselben unter einem Winkel φ sich neigende Geraden f und f' finden, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der Parabel sowohl von F und f wie auch von F und f' im Verhältnisse $1 : \sin\varphi$ stehen. Die Geraden f und f' sind Spiegelbilder voneinander in bezug auf die Ebene der $e^{(2)}$ und treffen diese Ebene in einem innerhalb der Parabel $e^{(2)}$ liegendem Punkte.

20. Ein ganz anderes Verfahren müssen wir befolgen bei Behandlung desjenigen Falles, bei welchem die Gerade f auf der Achse der Parabel $e^{(2)}$ senkrecht steht und sich zur Leitlinie derselben unter einem Winkel φ neigt.

Nehmen wir in der Ebene ε eine Parabel $e^{(2)}$ mit dem Scheitel S (Fig. 10) und eine Gerade l an, welche zur Achse der $e^{(2)}$ senkrecht steht, sich zur Ebene ε unter dem Winkel φ neigt und diese Ebene im Punkte L trifft. Durch $e^{(2)}$ legen wir solche Zylinder $C_i^{(2)}$, deren Erzeugende zu l senkrecht stehen und suchen die Orte $N^{(2)}$ und $H^{(2)}$ der Scheitelerzeugenden n_i und der Fokalachsen h_i jener Zylinder $C_i^{(2)}$ auf.

Die Hauptebenen der Zylinder $C_i^{(2)}$ stehen senkrecht auf l, und die Tangentialebenen ihrer Scheitelerzeugenden laufen parallel zu l. Steht daher die Ebene μ im Punkte M auf der Geraden l senkrecht, und trifft ein veränderlicher Strahl x_i des Büschels

(M, μ) die Ebene ε im Punkte X_i, so läuft die Tangentialebene $[n_i t_i]$ der Scheitelerzeugenden n_i des Zylinders $C_i^{(2)}$, dessen Erzeugende mit x_i parallel sind, mit der Ebene $[l x_i]$ parallel. Also trifft n_i die Parabel $c^{(2)}$ in demjenigen Punkte N_i, dessen Tangente t_i parallel ist zu LX_i.

Die Strahlen LX_i des Büschels (L, ε) treffen die unendlich ferne Tangente der Parabel $c^{(2)}$ in einer mit (L, ε) projektiven Reihe, und die durch die Punkte dieser Reihe gehenden Parabel-

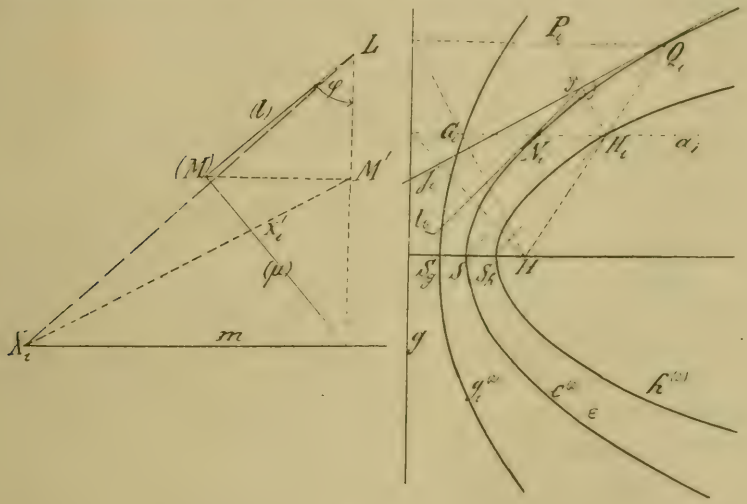


Fig. 10.

tangenten berühren $c^{(2)}$ ebenfalls in einer zu (L, ε) projektiven Reihe; schließlich treffen auch die Strahlen x_i des mit (L, ε) projektiven Büschels (M, μ) die unendlich ferne Gerade m_∞ der Ebene μ in einer mit (L, ε) projektiven Punktreihe M_i. Die Geraden $n_i \equiv N_i M_i$ kann man daher als das Erzeugnis der auf $c^{(2)}$ liegenden Punktreihe N_i, und derjenigen mit dieser projektiven Punktreihe M_i betrachten, deren Träger m_∞ die Parabel $c^{(2)}$ im unendlich fernen Punkte *trifft*. Dieser Treffpunkt entspricht in den beiden projektiven Reihen sich selbst, demzufolge jenes Erzeugnis eine parabolische Regelschaar ist. Wir haben daher:

Der Ort $N_i^{(2)}$ der Scheitelerzeugenden n_i derjenigen Zylinder $C_i^{(2)}$, welche durch eine gegebene Parabel $c_i^{(2)}$ gehen, und deren Er-

zeugende auf einer gegebenen zur Achse der Parabel perpendikulären Geraden senkrecht stehen, ist eine parabolische Regelschaar.

21. Die Hauptebene $[n_i a_i]$ des parabolischen Zylinders $C_i^{(2)}$ verbindet den durch N_i gehenden Durchmesser a_i der Parabel $e^{(2)}$ mit der Scheitelerzeugenden n_i. Schneidet man die Tangentialebene $[n_i t_i]$ der Scheitelerzeugenden n_i des Zylinders $C_i^{(2)}$ mit den veränderlichen Tangentialebenen derselben und errichtet in diesen Schnittgeraden normale Ebenen auf die Tangentialebenen, so treffen dieselben die Hauptebene $[n_i a_i]$ in der Fokalachse h_i des Zylinders. Eine dieser veränderlichen Normalebenen steht auch auf der Ebene ε der Parabel $e^{(2)}$ senkrecht, und diese ist zugleich parallel mit der auf ε orthogonal projizierenden Ebene des Strahles x_i. Ist daher j_i die mit der orthogonalen Projektion x_i' des Strahles x_i auf die Ebene ε parallele Tangente der $e^{(2)}$, so wird die Tangentialebene der durch den Berührungspunkt Q_i jener Tangenten gehenden Erzeugenden q_i schon senkrecht stehen zu ε. Die in der Ebene ε liegende und auf j_i im Punkte $J \equiv (t_i, j_i)$ normale Ebene trifft daher den Durchmesser a_i in der Spur H_i der Fokalachse h_i des Zylinders $C_i^{(2)}$, denn die Ebene $[h_i J]$ ist normal zur Tangentialebene $[q_i J]$ und geht durch die Treffgerade dieser Tangentialebene und der Tangentialebene $[n_i t_i]$ der Scheitelerzeugenden n_i.

Die Polare des Punktes J in Hinsicht auf $e^{(2)}$ ist die Gerade $N_i Q_i$, also hat J gleichen Abstand von den durch N_i und Q_i gehenden Durchmessern der $e^{(2)}$. Hieraus folgt des weiteren, daß der letztere Durchmesser das Spiegelbild P_i des Punktes H_i in bezug auf die Tangente j_i enthält, die Gerade $Q_i H_i$ durch den Brennpunkt H der $e^{(2)}$ geht, und schließlich P_i in der Leitebene des Cylinders $C_i^{(2)}$ liegt.

Das Verhältnis von HQ_i und HH_i ist ebenso groß, als das Verhältnis derjenigen Strecken, welche die vom Punkte H auf die Geraden j_i und t_i und also auch auf die zu jenen parallelen Geraden LX_i und x_i' gefällten Lote, von der Leitlinie g der Parabel $e^{(2)}$ von ihrer Achse gemessen, abschneiden. Da aber der Punkt X_i in der Schnittlinie m der auf E normalen Ebene μ und der Ebene ε liegt, so stehen jene Strecken auch in dem Verhältnisse, wie der Abstand des Punktes L und der Abstand

der auf ε liegenden orthogonalen Projektion des Punktes M von der Geraden m. Das Verhältnis der letzteren Abstände ist aber $1 : \cos^2\varphi$, also hat man:

$$\frac{HQ_i}{HH_i} = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

und in ebendiesem Verhältnisse sind auch die Abstände der Punkte Q_i und P_i von der Leitlinie g der Parabel $e^{(2)}$.

Beschreibt also Q_i die Parabel $e^{(2)}$, so beschreibt H_i eine mit $e^{(2)}$ in bezug auf den Brennpunkt H als Ähnlichkeitspunkt ähnlich liegende Parabel $h^{(2)}$, und P_i beschreibt eine mit $e^{(2)}$ in bezug auf die Leitlinie g als Affinitätsachse und die zur Achse der $e^{(2)}$ parallelen Geraden als Affinitätsstrahlen affine Parabel $p^{(2)}$.

Die Parabeln $e^{(2)}$ und $h^{(2)}$ sind wegen ihrer ähnlichen Lage auch konfokal. Auch sind die Parabeln $p^{(2)}$ und $h^{(2)}$ Polargebilde voneinander in bezug auf $e^{(2)}$, denn die Polare des Punktes P_i in Hinsicht auf $e^{(2)}$ läuft mit der Tangente j_i des Punktes Q_i parallel und enthält den Punkt H_i, ist daher die Tangente der $h^{(2)}$ in diesem Punkte. Ebenso geht auch die Polare des Punktes H_i in Hinsicht auf $e^{(2)}$ durch P_i und ist mit der Tangente t_i des Punktes N_i parallel.

Nachdem die Reihe der Punkte N_i und H_i auf den Parabeln $e^{(2)}$ und $h^{(2)}$ projektiv ist und die Scheitelerzeugenden n_i mit den Fokalaxen h_i der Cylinder $C_i^{(2)}$ parallel sind, die n_i aber eine parabolische Regelschaar $N_i^{(2)}$ bilden, so sind auch die Fokalachsen h_i jener Zylinder die Strahlen einer parabolischen Regelschaar $H_i^{(2)}$. Da nun die orthogonalen Projektionen der h_i auf ε die Tangenten der Parabel $h^{(2)}$ sind, so ist $h^{(2)}$ ein Hauptschnitt des hyperbolischen Paraboloides, als des Trägers jener Regelschaar. Die Scheitelerzeugenden dieses Paraboloides neigen sich unter dem Winkel $90 - \varphi$ zur Hauptebene ε, und dabei ist, wenn S_h den Scheitel bedeutet,

$$S_hH = SH \cdot \cos^2\varphi, \qquad SS_h + S_hH = SH,$$

also

$$\frac{SS_h}{S_hH} = \operatorname{tang}^2\varphi,$$

d. h.: der Scheitel S der Parabel $e^{(2)}$ ist der Brennpunkt des zweiten Hauptschnittes des Paraboloides $H_i^{(2)}$.

Daraus folgt:

„Legt man durch die Parabel $e^{(2)}$ solche Zylinder $C_i^{(2)}$, deren Erzeugende auf einer zur Achse der Parabel senkrecht stehenden und sich zur Ebene derselben unter einem Winkel φ neigenden Geraden senkrecht stehen, so ist der Ort der Fokalachsen h_i derselben eine parabolische Regelschaar. Das hyperbolische Paraboloid $H_i^{(2)}$, als Träger dieser Regelschaar, hat $e^{(2)}$ zur Fokalparabel. Der Scheitel S_h derselben teilt die vom Scheitel S und Brennpunkt H der Parabel $e^{(2)}$ begrenzte Strecke in der Weise, daß

$$S_h H \operatorname{tang}^2 \varphi = S S_h.$$

Mit Veränderung des Winkels φ ändern sich auch die hyperbolischen Paraboloide $H_i^{(2)}$ und beschreiben die ganze konfokale Schaar, und ihre Punkte erfüllen daher den ganzen Raum.

Die Punkte eines jeden der Zylinder $C_i^{(2)}$ haben gleichen Abstand von einem beliebigen Punkte F ihrer eigenen Fokalachse h_i und von der Leitlinie f des Normalschnittes, dessen Brennpunkt F ist."

Daher:

Ist ein Punkt F und eine Parabel $e^{(2)}$ gegeben, so kann man stets zwei zur Achse der $e^{(2)}$ senkrechte und zu ihrer Leitlinie unter einem gewissen Winkel φ sich neigende Geraden f und f' finden, welche die Eigenschaft haben, daß der Abstand der Punkte der Parabel sowohl von F und f, wie auch von F und f' gleich sei. Die Geraden f und f' sind Spiegelbilder voneinander in bezug auf die Ebene der $e^{(2)}$ und treffen diese Ebene in einem außerhalb der Parabel $e^{(2)}$ liegenden Punkte.

Die Hauptebenen der obigen Zylinder $C_i^{(2)}$ treffen die zugehörigen Leitebenen in solchen Geraden g_i, deren Ort ebenfalls eine parabolische Regelschaar ist. Jede dieser Geraden g_i trifft nämlich die Ebene der $e^{(2)}$ in demjenigen Punkte G_i des Durchmessers $N_i H_i \equiv a_i$, welcher von N_i denselben Abstand hat wie der Punkt H_i. Also liegen auch diese Punkte G_i auf einer Parabel $g_i^{(2)}$ und die Geraden g_i auf einem hyperbolischen Paraboloide $G_i^{(2)}$. Auch hier sind wie in den früheren Fällen die Flächen $H_i^{(2)}$ und $G_i^{(2)}$ Polargebilde voneinander in bezug auf $N_i^{(2)}$. Denn die Hauptebenen der Zylinder $C_i^{(2)}$ treffen jene Flächen in

den Parallelen h_i, g_i und n_i, und die Polarebenen der Punkte der h_i in bezug auf $N_i^{(2)}$ gehen durch die entsprechende Gerade g_i und berühren daher $G_i^{(2)}$.

* * *

22. Nachdem wir im Bisherigen alle möglichen Fälle betrachtet haben, gehen wir zu den einzelnen *Konstruktionen* über.

Zu dem Ende nehmen wir zuerst in der Ebene ε eine Ellipse $e^{(2)}$ an, deren Haupt- und Nebenachse $2a$ bezw. $2b$, und deren Exzentrizität c ist. Wir nehmen ferner eine zur Hauptachse der $e^{(2)}$ senkrechte und zur Nebenachse unter dem Winkel φ sich neigende Gerade f an, welche ε außerhalb der Ellipse $e^{(2)}$ trifft, und konstruieren aus diesen Daten die Strecke

$$m = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{c^2 + b^2 \cos^2\varphi}.$$

Verkürzt man dann den Abstand der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von der Geraden f im Verhältnisse $m : c$ und beschreibt mit diesen verkürzten Strecken aus den betreffenden Punkten der Ellipse Kugeln, so treffen sich diese (laut dem 10. und 11. Punkte) in einem reellen oder imaginären Punktpaar FF'. Dieses Punktepaar und die Gerade f hat gegenüber der Ellipse $e^{(2)}$ die Lage, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von F und f, wie auch von F' und f gleich ist dem Verhältnisse $c : m\,(< 1)$. —

Wenn aber f zur Nebenachse der $e^{(2)}$ senkrecht steht und sich zur Hauptachse unter einem solchen Winkel φ neigt, daß $\sin\varphi > \frac{b}{a}$, wenn ferner f die ε in einem innerhalb der Ellipse liegenden Punkte trifft, und schließlich

$$m_1 = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi - b^2}$$

ist, so vergrößere man die Abstände der Punkte der Ellipse von f in dem Verhältnisse $m_1 : c$ und beschreibe mit den vergrößerten Strecken aus den betreffenden Punkten der Ellipse Kugeln. Auch diese treffen sich (laut 12 und 13) in einem reellen oder imaginären Punktpaare FF', und das Verhältnis der Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von F und f, sowie von F' und f ist gleich dem Verhältnisse $c : m_1\,(> 1)$. —

Nehmen wir zweitens in der Ebene ε die Hyperbel $e^{(2)}$ an, deren Hauptachse $2a$, deren Exzentrizität c ist, und deren Potenzpunkte auf der Nebenachse den Abstand $2b$ haben. Wir nehmen ferner eine zur Hauptachse der $e^{(2)}$ senkrechte und zur Nebenachse unter dem Winkel φ sich neigende Gerade f an, welche ε außerhalb $e^{(2)}$ trifft und konstruieren die Strecke

$$m_3 = \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Verkürzt man die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von f im Verhältnisse $m_3 : c$ und beschreibt mit diesen verkürzten Strecken aus den betreffenden Punkten Kugeln, so gehen dieselben (laut 16 und 17) durch die zwei reellen oder imaginären Punkte FF'. Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von F und f, wie auch von F' und f ist daher $c : m_3 (< 1)$. —

Wenn aber die Gerade f auf die Nebenachse der $e^{(2)}$ senkrecht steht und sich zur Hauptachse unter dem Winkel φ neigt und ε innerhalb $e^{(2)}$ trifft, wenn ferner

$$m_2 = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2}$$

ist, so muß man die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von f im Verhältnisse $m_2 : c$ verkürzen und mit den verkürzten Strecken von den betreffenden Hyperbelpunkten Kugeln beschreiben. Diese schneiden sich (laut dem 14. und 15. Punkte) in dem Punktpaare FF', und das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperbel von F und f, sowie von F' und f ist also gleich dem Verhältnisse $c : m_2 (< 1)$. —

Nehmen wir endlich drittens zu einer Parabel $e^{(2)}$ der Ebene ε eine zu ihrer Achse senkrechte und zu ihrer Leitlinie unter dem Winkel φ sich neigende Gerade f an, welche ε außerhalb der Parabel trifft. Beschreibt man aus den Punkten der Parabel solche Kugeln, welche die Gerade f berühren, so schneiden sich diese (laut 20 und 21) in einem reellen oder imaginären Punktpaare FF'. Also ist der Abstand der Punkte der Parabel von F, F' und f gleich.* —

---

* Ist die Gleichung der Parabel $e^{(2)}$: $y^2 = 4px$, bedeuten u, v die Koordinaten der Spur von f auf ε bezüglich desselben rechtwinkeligen Koordinatensystems, und bildet f mit ε den Winkel φ, so sind die Ko-

Wenn sich aber die Gerade f zur Achse der Parabel unter dem Winkel φ neigt, zur Leitlinie derselben senkrecht steht und die ε innerhalb der Parabel trifft, so müssen wir die Abstände der Punkte der Parabel von f im Verhältnisse $1 : \sin\varphi$ verkürzen und mit diesen verkürzten Strecken aus den betreffenden Punkten der Hyperbel Kugeln beschreiben. Diese Kugeln schneiden sich (laut 18 und 19) in den Punkten F, F', und das Verhältnis der Abstände der Punkte der Parabel von F und f, sowie von F' und f ist gleich $\sin\varphi$.

Alle diese Konstruktionen, mittels welcher man zu einem Kegelschnitt $e^{(2)}$ und einer Geraden f den Punkt F (und F') so bestimmen kann, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte des Kegelschnittes von der Geraden f und dem Punkte F (oder F') ein konstantes ist, — sind zweiten Grades.

22a. Für den Punkt F kann man einen Ort angeben, auf welchem er in allen betrachteten Fällen liegen muß.

Es sei f die Leitlinie eines Meridians $d^{(2)}$ der obigen Rotationsflächen (Sferoid, einschaliges Hyperboloid, oder parab. Zylinder), und F der dazu gehörige Brennpunkt. Die Polare der Geraden f geht durch F und steht auf die Ebene der $d^{(2)}$ senkrecht. Die Polarebene π eines beliebigen Punktes P der Geraden f steht im Punkte F senkrecht auf der Geraden PF.

Schneidet daher eine beliebige Ebene ε eine jener Rotationsflächen im Kegelschnitt $e^{(2)}$ und die Gerade f im Punkte P, so geht die Polarebene von P durch die Polare p des Punktes P

---

ordinaten der orthogonalen Projektion des Punktes F auf ε:

$$\xi = u + 2p\cos^2\varphi, \quad \eta = v\sin^2\varphi,$$

und der Abstand des Punktes F von der Ebene ε ist

$$\xi = \cos\varphi\sqrt{v^2\sin^2\varphi - 4p(u + p\cos^2\varphi)}.$$

Bezeichnen nämlich (xy) die Koordinaten eines Punktes, so folgt aus den gleichen Abständen dieses Punktes von f und F:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2\sin^2\varphi$$
$$= (x - u - 2p\cos^2\varphi)^2 + (y - v\sin^2\varphi)^2 + \cos^2\varphi(v^2\sin^2\varphi - 4p(u + p\cos^2\varphi))$$

die Gleichung obiger Parabel.

F ist daher nur dann reell, wenn

$$v^2\sin^2\varphi - 4p(u + p\cos^2\varphi) \geqq 0.$$

in bezug auf $e^{(2)}$, und der Punkt F liegt auf demjenigen Kreis $\varkappa$, den die Fußpunkte der vom Punkte P auf die Ebenen der p gefällten Senkrechten bilden.

Daraus folgt:

Ist das Verhältnis der Abstände der Punkte des Kegelschnitts $e^{(2)}$ von der Geraden f und dem Punkte F ein konstantes, ist ferner P der Schnittpunkt der Geraden f mit der Ebene von $e^{(2)}$, und Q der Fußpunkt des vom Punkte P auf seine Polare p gefällten Lotes, so liegt der Punkt F auf demjenigen Kreis $\varkappa$, dessen Durchmesser PQ ist und dessen Ebene auf p senkrecht steht.

23. Nehmen wir wieder in der Ebene ε den Kegelschnitt $e^{(2)}$ und irgendwo einen Punkt F an. Bestimmen wir aus diesen Daten die Gerade f in der Weise, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte des Kegelschnitts von F und f ein konstantes sei.

Es sei zuerst $e^{(2)}$ eine Ellipse, deren Haupt- und Nebenachse mit $2a$ bezw. $2b$ und deren Exzentrizität mit c bezeichnet werde.

Durch F führen wir jenes einschalige Hyperboloid $H_i^{(2)}$, dessen Fokalellipse $e^{(2)}$ ist.

Bezeichnet $2\mathfrak{b}$ den Abstand der Potenzpunkte auf der zur Ebene ε senkrechten Achse des Hyperboloids $H_i^{(2)}$, und ist

$$\mathfrak{c}^2 = a^2 - \mathfrak{b}^2, \qquad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

so ist $H_i^{(2)}$ der Ort der Fokalkreise derjenigen durch $e^{(2)}$ gehenden ähnlichen und ähnlich liegenden Sferoide $D_i^{(2)}$, deren Rotationsachsen mit der Ebene und der Nebenachse von $e^{(2)}$ einen Winkel φ bilden (10. und 11. Punkt). Und da das Verhältnis der Haupt- und Nebenachsen der Sferoide $a : \mathfrak{b}$ ist, so ist das Verhältnis der Abstände der Punkte der Sferoide $D_i^{(2)}$, und folglich auch der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von einem beliebigen Punkte des Fokalkreises irgend eines der Sferoide und von der zugehörigen Leitlinie ihres Meridianes gleich $\mathfrak{c} : a$.

Vergrößert man daher die Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von F im Verhältnisse $\mathfrak{c} : a$ und beschreibt aus den betreffenden Ellipsenpunkten mit den vergrößerten Strecken Kugeln, so sind die gemeinsamen Tangenten f und f' derselben die gewünschten Geraden. Je zwei Kugeln, deren Mittelpunkte in bezug auf die Nebenachse der $e^{(2)}$ symmetrisch liegen, treffen sich in einem

Kreise, und alle diese Kreise liegen in einer zur Hauptachse der $e^{(2)}$ senkrechten Ebene und ihre gemeinsamen Tangenten sind die gewünschten Geraden f und f'. Mittels jener Kreise kann man daher die Geraden f und f', welche die Ebene der $e^{(2)}$ außerhalb der Ellipse $e^{(2)}$ treffen, leicht konstruieren. —

24. Führen wir jetzt durch den gegebenen Punkt F dasjenige Ellipsoid $H_i^{(2)}$, dessen Fokalellipse $e^{(2)}$ ist.

Ist $2\mathfrak{a}$ die Länge der zur Ebene der $e^{(2)}$ senkrechten Achse derselben und

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \qquad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

so wird das Ellipsoid $H_i^{(2)}$ der Ort der Fokalkreise derjenigen durch $e^{(2)}$ gehenden ähnlichen und ähnlich liegenden einschaligen Rotationshyperboloide $D_i^{(2)}$ sein, deren Rotationsachsen mit der Ebene und der Hauptachse der $e^{(2)}$ den Winkel φ bilden (12. und 13. Punkt). Das Verhältnis der Abstände der Punkte dieser Hyperboloide und also auch der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ von irgend einem Punkte des Fokalkreises einer der Hyperboloide und von der dazu gehörigen Leitlinie des Meridians ist gleich $\mathfrak{c} : b$.

Verkleinert man daher die Abstände der Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ vom Punkte F im Verhältnisse $\mathfrak{c} : b$ und beschreibt mit den verkürzten Strecken von den betreffenden Ellipsenpunkten Kugeln, so sind ihre gemeinsamen Tangenten f und f' die gewünschten Geraden. Je zwei der Kugeln, deren Mittelpunkte in bezug auf die Hauptachse der $e^{(2)}$ symmetrisch liegen, treffen sich in einem Kreise, und alle diese Kreise liegen in einer zur Nebenachse der $e^{(2)}$ senkrechten Ebene, und ihre gemeinsamen Tangenten sind f und f'. Mittels dieser Kreise kann man daher die Geraden f und f', welche die Ebene der $e^{(2)}$ innerhalb der Ellipse $e^{(2)}$ treffen, finden.

25. Es sei zweitens $e^{(2)}$ eine in der Ebene ε liegende Hyperbel, deren Hauptachse $2a$, deren Elektrizität e ist und deren Potenzpunkte den Abstand $2b$ haben.

Durch den Punkt F führen wir dasjenige einschalige Hyperboloid, dessen Fokalhyperbel die $e^{(2)}$ ist.

Bezeichnet man den Abstand der Potenzpunkte auf der zur Hauptebene ε des Hyperboloids senkrechten Achse mit $2\mathfrak{b}$ und ist

$$\mathfrak{c}^2 = a^2 + \mathfrak{b}^2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

so ist das Hyperboloid der Ort der Fokalkreise derjenigen durch $e^{(2)}$ gehenden ähnlichen und ähnlich liegenden einschaligen Rotationshyperboloide $D_i^{(2)}$, deren Rotationsachsen mit der Ebene und der Nebenachse der $e^{(2)}$ den Winkel φ bilden (16. und 17. Punkt). Das Verhältnis der Abstände der Punkte dieser Hyperboloide, $D_i^{(2)}$ und also auch der Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von irgend einem Punkte des Fokalkreises eines der Hyperboloide und von der Leitlinie des entsprechenden Meridians ist gleich $\mathfrak{c} : a$.

Verkürzt man daher die Abstände der Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von dem Punkte F im Verhältnisse $\mathfrak{c} : a$ und beschreibt von den betreffenden Hyperbelpunkten mit den verkürzten Strecken Kugeln, so sind die gemeinsamen Tangenten f und f' derselben die gewünschten Geraden. Je zwei dieser Kugeln, deren Mittelpunkte in bezug auf die Nebenachse der Hyperbel symmetrisch liegen, treffen sich in einem Kreise; die gemeinsame Ebene derselben steht auf der Hauptachse der Hyperbel senkrecht, und ihre gemeinsamen Tangenten f und f' bilden mit der Nebenachse den Winkel φ. Mittels dieser Kreise kann man daher die Geraden f und f', welche die Ebene der $e^{(2)}$ außerhalb der Hyperbel $e^{(2)}$ treffen, leicht finden.

26. Führen wir nunmehr durch den Punkt F dasjenige zweischalige Hyperboloid, dessen Fokalhyperbel ebenfalls $e^{(2)}$ ist.

Haben die Potenzpunkte der zur Hauptebene ε derselben senkrechten Achse den Abstand $2\mathfrak{a}$ und ist

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

so ist jenes Hyperboloid der Ort der Fokalkreise derjenigen durch die Hyperbel $e^{(2)}$ gehenden ähnlichen und ähnlich liegenden einschaligen Rotationshyperboloide $D_i^{(2)}$, deren Rotationsachsen mit der Ebene und der Hauptachse der $e^{(2)}$ den Winkel φ bilden (14. und 15. Punkt). Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperboloide $D_i^{(2)}$ und also auch der Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von irgend einem Punkte des Fokalkreises eines der Hyperboloide und von der Leitlinie des entsprechenden Meridians ist gleich $\mathfrak{c} : b$.

Verkürzt man daher die Abstände der Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$

vom Punkte F diesmal im Verhältnis $c : b$ und beschreibt aus den betreffenden Hyperbelpunkten mit diesen verkürzten Strecken wieder Kugeln, so sind ihre gemeinsamen Tangenten f und f' die gewünschten Geraden. Je zwei der Kugeln, deren Mittelpunkte in bezug auf die Hauptachse der $e^{(2)}$ symmetrisch sind, treffen sich in solchen Kreisen, welche in einer zur Nebenachse der $e^{(2)}$ senkrechten gemeinsamen Ebene liegen, und ihre gemeinsamen Tangenten f und f' bilden mit der Hauptachse der $e^{(2)}$ den Winkel φ. Mittels dieser Kreise kann man daher die Geraden f und f' finden, welche die Ebene der $e^{(2)}$ innerhalb der Hyperbel $e^{(2)}$ treffen.

27. Nehmen wir schließlich drittens in der Ebene ε eine Parabel $e^{(2)}$ an, deren Brennpunkt vom Scheitel den Abstand p hat.

Durch den Punkt F führen wir jetzt dasjenige elliptische Paraboloid, dessen Fokalparabel die $e^{(2)}$ ist und welches diese Fokalparabel einschließt.

Hat der Scheitel dieses Paraboloids vom Scheitel der Parabel den Abstand s und ist

$$\sin^2 \varphi = \frac{p}{p+s},$$

so ist das Paraboloid der Ort der Fokalkreise derjenigen durch $e^{(2)}$ gehenden ähnlichen und ähnlich liegenden einschaligen Rotationshyperboloide $D_i^{(2)}$, deren Rotationsachsen mit der Ebene und der Achse der $e^{(2)}$ den Winkel φ bilden (18. und 19. Punkt). Das Verhältnis der Abstände der Punkte der Hyperboloide und also auch der Punkte der Parabel $e^{(2)}$ von irgend einem Punkte des Fokalkreises eines der Hyperboloide und von der Leitlinie des entsprechenden Meridians ist gleich $1 : \sin \varphi$.

Verkürzt man daher die Abstände der Punkte der Parabel $e^{(2)}$ von F im Verhältnis $\sqrt{s+p} : \sqrt{p}$ und beschreibt mit den verkürzten Streckten aus den betreffenden Punkten der Parabel Kugeln, so sind die gemeinsamen Tangenten f und f' derselben die gewünschten Geraden. Je zwei der Kugeln, deren Mittelpunkte in bezug auf die Achse der $e^{(2)}$ symmetrisch liegen, treffen sich in einem Kreise. Alle diese Kreise liegen in einer zur Leitlinie der $e^{(2)}$ senkrechten Ebene, und ihre gemeinsamen Tangenten f und f' bilden mit der Achse der $e^{(2)}$ den Winkel φ.

Mittels dieser Kreise kann man daher die Geraden f und f' finden, welche die Ebene der $e^{(2)}$ innerhalb der Parabel $e^{(2)}$ schneiden.

28. Führen wir noch durch den Punkt F dasjenige hyperbolische Paraboloid, dessen Fokalparabel die $e^{(2)}$ ist.

Hat der Scheitel desselben vom Scheitel der Parabel den Abstand s und ist

$$\sin^2 \varphi = \frac{p - s}{p},$$

so ist das Paraboloid der Ort der Fokalachsen derjenigen durch die Parabel $e^{(2)}$ gehenden Zylinder $C_i^{(2)}$, deren Erzeugende mit der zur Achse der Parabel parallelen und zur Ebene derselben unter dem Winkel φ sich neigenden Ebene parallel laufen (20. und 21. Punkt). Die Punkte dieser Zylinder $C_i^{(2)}$ und also auch die Punkte der Parabel haben von irgend einem Punkte der Fokalachse eines beliebigen der Zylinder und von der Leitlinie desjenigen Normalschnittes, dessen Brennpunkt der angenommene Punkt ist, gleichen Abstand.

Beschreibt man also aus den Punkten der Parabel $e^{(2)}$ Kugeln, welche durch F gehen, so sind die gemeinsamen Tangenten f und f' derselben die gewünschten Geraden. Konstruiert man zu diesen Kugeln diejenigen Berührungszylinder, deren Erzeugende sich zur Ebene und zur Leitlinie der Parabel unter dem Winkel φ neigen, so sind die gemeinsamen Erzeugenden dieser Zylinder die Geraden f und f'. Diese sind in bezug auf die Ebene der $e^{(2)}$ symmetrisch und treffen diese in einem außerhalb der Parabel $e^{(2)}$ liegenden Punkte.

29. Die unter 23—28 angeführten Konstruktionen erfordern die Kenntnis der Lösung der Aufgabe:

Durch den Punkt F eine Fläche zweiter Ordnung zu führen, deren Fokalkegelschnitt ein gegebener Kegelschnitt $e^{(2)}$ sei.

Durch F gehen drei Flächen zweiter Ordnung $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$ und $F_3^{(2)}$, deren Fokalkegelschnitt $e^{(2)}$ ist; und zwar: ist $e^{(2)}$ eine Ellipse oder Hyperbel, so sind die drei Flächen bezw. ein Ellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid, ein einschaliges Hyperboloid; wenn aber $e^{(2)}$ eine Parabel ist, so sind $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$ elliptische Paraboloide, während $F_3^{(2)}$ ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Die Normalen x, y, z dieser Flächen im Punkte F sind die Achsen desjenigen Kegels $F \cdot e^{(2)}$ zweiter Ordnung, dessen Erzeugende die Punkte der $e^{(2)}$ aus F projizieren, sowie die Achsen desjenigen Kegels $F \cdot e_1^{(2)}$ zweiter Ordnung, dessen Erzeugende die Punkte des zu $e^{(2)}$ Fokalkegelschnitts $e_1^{(2)}$ aus F projizieren. Und zwar: wenn $e^{(2)}$ eine Ellipse, daher $e_1^{(2)}$ eine Hyperbel ist, so ist die elliptische Achse des Kegels $F \cdot e^{(2)}$ die Normale des Ellipsoids $F_1^{(2)}$; die elliptische Achse y des Kegels $F \cdot e_1^{(2)}$ die Normale des zweischaligen Hyperboloids $F_2^{(2)}$, also die Achse z die Normale des einschaligen Hyperboloids $F_3^{(2)}$. Wenn aber $e^{(2)}$ und $e_1^{(2)}$ Fokalparabeln sind, so sind die elliptische Achsen x und y der Kegel $F \cdot e^{(2)}$ und $F \cdot e_1^{(2)}$ die Normalen der zwei elliptischen Paraboloide $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(2)}$, während z die Normale des hyperbolischen Paraboloids $F_3^{(2)}$ ist.

Nachdem die Spuren der Achsen x, y, z auf den Ebenen der Kegelschnitte $e^{(2)}$, $e_1^{(2)}$ die Endpunkte je eines Polardreiecks dieser Kegelschnitte sind, so ist im ersten Falle die Achse x, welche die Ebene der $e^{(2)}$ innerhalb dieser Ellipse trifft, die Normale des die $e^{(2)}$ in sich schließenden Ellipsoids $F_1^{(2)}$; die Achse y aber, welche die Ebene der $e_1^{(2)}$ innerhalb dieser Hyperbel trifft, die Normale des die $e_1^{(2)}$ in sich schließenden zweischaligen Hyperboloids $F_2^{(2)}$. Im zweiten Falle ist die Achse x, welche die Ebene der $e^{(2)}$ innerhalb dieser Parabel trifft, die Normale des die $e^{(2)}$ in sich schließenden elliptischen Paraboloids $F_1^{(2)}$ und die Achse y, welche die Ebene der $e_1^{(2)}$ innerhalb dieser Parabel trifft, die Normale des die $e_1^{(2)}$ in sich schließenden andern elliptischen Paraboloids $F_2^{(2)}$.

Nachdem wir aus diesen Ergebnissen wissen, welche der Normalen zu $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$ resp. $F_3^{(2)}$ gehört, wollen wir sehen, wie man entweder die Längen der auf den Ebenen der Fokalkegelschnitte $e^{(2)}$ und $e_1^{(2)}$ senkrechten Achsen oder die auf der Achse der $e^{(2)}$ liegenden Scheitel jener Flächen findet, denn die Konstruktionen 23—28 erfordern die Kenntnis derselben.

30. Bezeichnen wir den gemeinsamen Mittelpunkt der Fokalkegelschnitte $e^{(2)}$ und $e_1^{(2)}$ mit C, die Scheitel auf der gemeinsamen Hauptachse derselben bezw. mit SS' und S_1S_1'; die Schnittpunkte der Achse SS' mit der vom Punkte F auf die Achse SS' gefällten

senkrechten Ebene μ und mit den Ebenen $[yz]$, $[zx]$, $[xy]$ bezw. mit M, M_1, M_2 und M_3.

Die Ebenen $[yz]$, $[zx]$, $[xy]$ sind bezw. Tangentialebenen der Flächen $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$ und $F_3^{(2)}$ im Punkte F, also ist die Ebene μ die Polarebene der Punkte M_1, M_2, M_3 und somit sind MM_1, MM_2, MM_3 konjugierte Pole in bezug auf $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$ resp. $F_3^{(2)}$.

Die Scheitel S, S' sind die Brennpunkte derjenigen Hauptschnitte der Flächen $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$, $F_3^{(2)}$, deren Ebene durch SS' geht und auf der Ebene der $e^{(2)}$ senkrecht steht; die Scheitel S_1, S_1' sind die Brennpunkte derjenigen Hauptschnitte jener Flächen, deren Ebene ebenfalls durch SS' geht und auf der Ebene der $e_1^{(2)}$ senkrecht steht.

Darum haben die Potenzpunkte der zur Ebene der Ellipse $e^{(2)}$ senkrechten Achse des einschaligen Hyperboloids $F_3^{(2)}$ den Abstand (23)

$$2\mathfrak{b} = \sqrt{CM \cdot CM_3 + \overline{CS}^2},$$

die Länge der zur Ebene der $e^{(2)}$ senkrechten Achse des Ellipsoids $F_1^{(2)}$ ist gleich (24)

$$2\mathfrak{a} = \sqrt{CM \cdot CM_1 - \overline{CS}^2},$$

die Länge der zur Ebene der Hyperbel $e_1^{(2)}$ senkrechten Achse des einschaligen Hyperboloides ist gleich (25)

$$2\mathfrak{b} = \sqrt{CM \cdot CM_3 - \overline{SC}^2},$$

endlich haben die Potenzpunkte der zur Ebene der $e_1^{(2)}$ senkrechten Achse des zweischaligen Hyperboloids $F_2^{(2)}$ den Abstand (26)

$$2\mathfrak{a} = \sqrt{CM \cdot CM_2 + \overline{CS}^2}.$$

Mit Hilfe dieser Strecken lassen sich aber jene Proportionen unter 23—26, sowie die Winkel φ konstruieren.

Nehmen wir jetzt den zweiten Fall in Betracht, bei welchem $e^{(2)}$ und $e_1^{(2)}$ Fokalparabeln sind mit den Scheiteln S und S_1, und bezeichnen wieder die Treffpunkte der gemeinsamen Achse jener Parabeln mit den aus dem Punkte F auf diese Achse gefällten senkrechten Ebenen μ und den Ebenen $[yz]$, $[zx]$, $[xy]$ bezw.

mit M, M_1, M_2 und M_3. Die Punktpaare M, M_1; M, M_2; M, M_3 sind konjugierte Pole in bezug auf die elliptischen Paraboloide $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$ resp. auf das hyperbolische Paraboloid $F_3^{(2)}$, also sind die Halbierungspunkte C_1, C_2, C_3 der Strecken MM_1, MM_2, MM_3 die Scheitel derselben.

Die Punkte S, S_1 sind die Brennpunkte derjenigen Hauptschnitte der Paraboloide, deren Ebenen bezw. auf den Ebenen der $e^{(2)}$ und $e_1^{(2)}$ senkrecht stehen.

Die in 27 mit p und s bezeichneten Strecken sind daher SS_1 und C_1S, und die im Punkte 28 mit s bezeichnete Strecke ist C_3S.

Mittels dieser Strecken lassen sich daher die im 27. und 28. Punkt mit φ bezeichneten Winkel konstruieren.

Damit haben wir in allen sechs Fällen gezeigt, wie sich die angegebene Aufgabe lösen läßt, wenn der Punkt F gegeben ist. Aber diese Konstruktion unterscheidet sich von der andern, bei welcher nebst dem Kegelschnitt die Gerade f gegeben ist, dadurch, daß sie *kubisch* ist, denn sie erfordert die Bestimmung der Achsen eines allgemeinen Kegels zweiter Ordnung, welche eine kubische Aufgabe ist.

Daher:

Diejenigen Konstruktionen, mittels welchen wir zu einem Punkte F eine Gerade f so bestimmen können, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte eines gegebenen Kegelschnittes $e^{(2)}$ von F und f ein konstantes sei, sind im allgemeinen kubisch.

II. Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von einer Ebene und einem Punkte konstant sind.

31. Dreht man die drei Kegelschnitte: die Ellipse, Hyperbel und Parabel um ihre Hauptachsen, so entstehen die drei Rotationsflächen, welche Brennpunkte und Leitebenen haben, nämlich das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid. Das Verhältnis der Abstände der Punkte dieser Flächen von irgend einem ihrer Brennpunkte und der dazu gehörigen Leitebene ist ein konstantes. Da nun jede Ebene diese Flächen in Kegelschnitten trifft, *so ist auch der Ort der Punkte in einer Ebene ε,*

deren Abstände von einem Raumpunkte F und von einer Ebene φ in konstantem Verhältnis λ stehen, ein Kegelschnitt $e^{(2)}$.

Bei $\lambda < 1$ ist $e^{(2)}$ eine Ellipse (Kreis); bei $\lambda = 1$ ist $e^{(2)}$ eine Ellipse oder Parabel; endlich bei $\lambda > 1$ ist $e^{(2)}$ ein beliebiger Kegelschnitt, denn diesen Fällen entsprechend sind die durch F, φ und λ bestimmten Rotationsflächen bezw. Ellipsoid, Paraboloid und zweischaliges Hyperboloid. Auch geht die Schnittlinie der Ebenen ε, φ stets parallel zur Leitlinie des Kegelschnittes $e^{(2)}$.

32. Lösen wir jetzt die umgekehrte Aufgabe, nämlich:

Ist in der Ebene ε ein Kegelschnitt $e^{(2)}$, ferner eine beliebige zu einer Leitlinie der $e^{(2)}$ parallele Ebene φ gegeben, so bestimme man den Punkt F in der Weise, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von F und φ ein konstantes sei.

Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir folgende Hilfssätze vorausschicken:

1. „Geht eine Ebene π durch einen Brennpunkt F einer Rotationsfläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$, so steht die Gerade, welche diesen Brennpunkt mit dem Pole P der Ebene π verbindet, senkrecht zu dieser Ebene."

Der Punkt P liegt nämlich in der Leitlinie desjenigen Meridians der Fläche, dessen Ebene durch P geht. Daher steht die Gerade PF nicht nur auf der Polare p_1 des Punktes P in bezug auf jenen Meridian senkrecht, sondern auch auf der durch p_1 gehenden und zu jener Meridianebene normalen Ebene π.

Daraus folgt:

Geht die Achse eines Büschels von konjugierten Polarebenen einer Rotationsfläche durch einen Brennpunkt desselben, so ist es ein orthogonales.

2. „Derjenige Kegel, welcher einen ebenen Schnitt einer Rotationsfläche zweiter Ordnung von einem ihrer Brennpunkte projiziert, ist ein Rotationskegel."

Es schneide die Ebene ε die Rotationsfläche $F^{(2)}$ und die Leitebene φ derselben in dem Kegelschnitt $e^{(2)}$ und in der Geraden p, ferner sei p_1 die Polare der p in bezug auf $F^{(2)}$. Nachdem die durch p_1 gehenden konjugierten Polarebenen der $F^{(2)}$ auch in bezug auf denjenigen Kegel $F \cdot e^{(2)}$ konjugierte Polar-

ebenen sind, welcher $e^{(2)}$ aus dem zu φ gehörigen Brennpunkte F projiziert, und nachdem p_1 auf ihrer Polarebene $|Fp|$ in bezug auf $F \cdot e^{(2)}$ senkrecht steht, so ist $F \cdot e^{(2)}$ ein Rotationskegel.

Die Treffpunkte P, P_1 des Polarenpaares p, p_1 mit der Hauptachse SS' des Kegelschnittes $e^{(2)}$ trennen die Scheitelpunkte S, S' harmonisch, und da $PF \perp p_1$ ist, so liegt der Brennpunkt F der Fläche $F^{(2)}$ auf demjenigen Kreis $k^{(2)}$, dessen Durchmesser PP_1 ist und dessen Ebene durch die Hauptachse der $e^{(2)}$ gehend auf φ senkrecht steht.

Aus dem Hilfssatze 2 folgt:

„Hat eine Rotationsfläche zweiter Ordnung Brennpunkte, so gehen die Fokalkegelschnitte jedes ebenen Schnittes der Fläche durch diese Brennpunkte."

33. Es sei $e^{(2)}$ ein in der Ebene ε gegebener Kegelschnitt, ferner φ eine zu den Leitlinien der $e^{(2)}$ parallele Ebene. Man bestimme den zur Leitebene φ gehörigen Brennpunkt derjenigen Rotationsfläche $F^{(2)}$, welche durch $e^{(2)}$ geht.

Der Punkt F liegt einerseits auf dem Fokalkegelschnitt $e_1^{(2)}$ des Kegelschnittes $e^{(2)}$, anderseits auf demjenigen Kreis $k^{(2)}$ der Ebene von $e_1^{(2)}$, welcher seinen Mittelpunkt auf der Hauptachse SS' von $e^{(2)}$ hat, die Scheitelpunkte SS' harmonisch trennt und durch den Treffpunkt von S, S' und φ geht. Jeder der Treffpunkte F und F' des Kreises $k^{(2)}$ und des Kegelschnittes $e_1^{(2)}$ kann als Brennpunkt einer durch $e^{(2)}$ gehenden Rotationsfläche $F^{(2)}$ betrachtet werden, deren zu dem Brennpunkte gehörige Leitebene φ ist. Daher ist das Verhältnis der Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ sowohl von F und φ wie auch von F' und φ ein konstantes.

Wie aus der Konstruktion ersichtlich, sind F und F' nur vom Kegelschnitt $e^{(2)}$ und der Spur p der Ebene φ auf ε abhängig. Und zwar trennen die Leitlinien des Kegelschnittes $e^{(2)}$ die Ebene ε in zwei Teile; in dem einen Teil liegt $e^{(2)}$ selbst, und in dem andern hat $e^{(2)}$ keinen reellen Punkt. Jenachdem nun $p = (\varphi, \varepsilon)$ in dem ersten oder zweiten dieser Ebenenteile liegt oder in eine Leitlinie der $e^{(2)}$ fällt, sind FF' imaginär, reell und verschieden oder reell und koinzidierend.

Auch können wir leicht die Gattung der durch $e^{(2)}$ gelegten

Rotationsfläche $F^{(2)}$ bestimmen, wenn sich die Ebene φ um ihre Spur p dreht.

Nachdem man aus $e^{(2)}$ und p die Punkte F und F' bestimmt hat, welche einzeln als Brennpunkte der Flächen $F^{(2)}$ betrachtet werden können, beschreibe man aus dem einen der Scheitelpunkte der Hauptachse des Kegelschnittes $e^{(2)}$ eine Kugel $\gamma^{(2)}$. Durch p kann man 2, 1 oder 0 reelle Tangentialebenen zu $\gamma^{(2)}$ führen, jenachdem $e^{(2)}$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Die Fläche $F^{(2)}$ selbst ist ein zweischaliges Hyperboloid, Ellipsoid oder Paraboloid, jenachdem die als Leitebene des Brennpunktes F (oder F') betrachtete Ebene φ des Büschels p die Kugel $\gamma^{(2)}$ in einem reellen oder imaginären Kreise schneidet oder dieselbe berührt. Wenn $e^{(2)}$ eine Ellipse ist, so kann man demnach durch sie ∞^1 zweischalige Hyperboloide, ∞^1 Ellipsoide und zwei Paraboloide legen; wenn $e^{(2)}$ eine Parabel ist, so kann man durch sie ∞^1 zweischalige Hyperboloide und ein Paraboloid legen; endlich wenn $e^{(2)}$ eine Hyperbel ist, so kann man durch sie nur ∞^1 zweischalige Hyperboloide legen, deren Leitebene die Ebene der $e^{(2)}$ in einer gegebenen und zur Leitlinie der $e^{(2)}$ parallelen Geraden p trifft. In allen drei Fällen verkümmern zwei der Hyperboloide in Rotationskegel und eins in die Ebene ε der $e^{(2)}$. Für diese Rotationskegel gehen die entsprechenden Ebenen φ durch die Brennpunkte F oder F'.

Wir sehen aus diesen Untersuchungen, *wie man, wenn ein Kegelschnitt $e^{(2)}$ und ein Punkt F seines Fokalkegelschnittes $e_1^{(2)}$ gegeben ist, eine Ebene so bestimmen kann, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von F und φ ein konstantes sei.*

Die zu $e_1^{(2)}$ gehörige Normalebene des Punktes F trifft die Ebene der $e^{(2)}$ in p; jede Ebene des Büschels p hat schon die gewünschte Eigenschaft.

Dies ist laut 7 auch unmittelbar ersichtlich. Denn nachdem das Verhältnis der Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von F und p ein konstantes ist, so stehen auch die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von F und jeder Ebene des Büschels p in konstantem Verhältnis.

34. Aus den Hilfssätzen unter 32 kann man eine einfache Konstruktion der Fokalstrahlen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ ableiten.

Führt man durch den Punkt M Tangentialebenen zur Rota-

tionsfläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$, deren Brennpunkte F und F' sind, so berühren dieselben $F^{(2)}$ in den Punkten eines Kegelschnittes $e^{(2)}$, und die konjugierten Polarebenen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ sind auch in bezug auf $F^{(2)}$ konjugiert. Da aber die konjugierten Ebenen der Büschel MF und MF' in bezug auf $F^{(2)}$, also auch in bezug auf $M \cdot e^{(2)}$ je ein orthogonales involutorisches Ebenenbüschel bilden, so sind MF und MF' die Fokalstrahlen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$.

Die Strahlen MF und MF' berühren aber den Fokalkegelschnitt $e_1^{(2)}$ des Kegelschnittes $e^{(2)}$ in den Punkten F und F'. Denn nach Früherem wird $e^{(2)}$ aus F und F' durch Rotationskegel projiziert, deren Rotationsachsen die Tangenten der $e_1^{(2)}$ sind. Daraus folgt:

Zwei beliebige Tangenten eines Kegelschnittes sind Fokalstrahlen desjenigen Kegels, welcher den Fokalkegelschnitt des ersteren Kegelschnittes aus dem Treffpunkte der Tangenten projiziert.

Ist also ein Kegelschnitt $e^{(2)}$ und ein Punkt M im Raume gegeben, dessen orthogonale Projektion M' auf die Ebene ε der $e^{(2)}$ auf der Hauptachse SS' dieses Kegelschnittes liegt, so sind die vom Punkte M zum Fokalkegelschnitt $e_1^{(2)}$ der $e^{(2)}$ geführten Tangenten die Fokalstrahlen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$.

Kann man aber vom Punkte M keine reellen Tangenten zum Fokalkegelschnitt $e_1^{(2)}$ legen, so sei N der Punkt, welcher M' von den Brennpunkten des Kegelschnittes $e^{(2)}$ harmonisch trennt, und $k^{(2)}$ der über den Durchmesser NM' beschriebene Kreis in der Ebene ε. Dieser Kreis trifft eine der winkelhalbierenden Ebenen desjenigen Winkels, dessen Schenkel die von M zu den Scheitelpunkten S, S' auf der Hauptachse des Kegelschnittes geführten Strahlen MS, MS' sind, in zwei Punkten U, V, welche auf den Fokalstrahlen MU, MV des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ liegen. Denn die konjugierten Polarebenen dieser Strahlen in bezug auf den Kegel bilden eine orthogonale Involution.

Fällt schließlich die orthogonale Projektion M' des Punktes M auf die Nebenachse des Kegelschnittes $e^{(2)}$, so trifft der durch M' und durch die Brennpunkte F, F' der $e^{(2)}$ gelegte Kreis eine der winkelhalbierenden Ebenen derjenigen Winkel, deren Schenkel die Scheitelpunkte auf der Nebenachse der $e^{(2)}$ aus M projizieren,

ebenfalls in zwei Punkten, welche aus demselben Grunde wie oben auf den Fokalstrahlen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ liegen.

Nehmen wir jetzt den allgemeinsten Fall an, nämlich daß das Polardreieck ABC des Kegelschnittes $e^{(2)}$ das Spurendreieck der Hauptebenen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ ist und suchen wir die Fokalstrahlen und zyklischen Ebenen dieses Kegels. Die orthogonale Projektion M' des Kegelscheitels M auf die Ebene ε der $e^{(2)}$ ist der Höhepunkt des Dreiecks ABC. Die Polare m von M' in bezug auf $e^{(2)}$ trifft die Gegenseitenpaare $BC, M'A$; $CA, M'B$; $AB, M'C$ des Vierecks $ABCM'$ in den Punktpaaren A_1, A_1'; B_1, B_1'; C_1, C_1'; die von den Punkten A_1', B_1', C_1' bezw. auf die Geraden A_1M', B_1M', C_1M' gefällten Senkrechten treffen die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC in den Punkten A_2, B_2, C_2. Auf einer Seite dieses Dreiecks bestimmen die Eckpunktpaare und eines der Punktpaare A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 eine hyperbolische, auf den übrigen zwei Seiten eine elliptische Involution. Die Doppelpunkte jener hyperbolischen Involution werden aus dem Kegelscheitel M durch die Fokalstrahlen des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ projiziert, denn die durch diese gehenden konjugierten Polarebenen des Kegels bilden eine orthogonale Involution.

Zieht man durch die Eckpunkte des Polardreiecks ABC Parallele zu den Achsen des Kegelschnittes $e^{(2)}$, so bilden diese, sowie die von den Eckpunkten ausstrahlenden Seiten des Dreiecks konjugierte Strahlen einer hyperbolischen und zweier elliptischen Involutionen. Diejenigen Ebenen, welche die Doppelstrahlen jener hyperbolischen Involution aus dem Scheitel M des Kegels $M \cdot e^{(2)}$ projizieren, sind die zyklischen Ebenen dieses Kegels.

III. Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von einer Ebene und einer Geraden konstant sind.

35. Die Abstände der Punkte eines Kegels II. Ordnung $K^{(2)}$ von einem Fokalstrahle f und von seiner Polarebene φ stehen in konstantem Verhältnisse.* Da aber der Kegel $K^{(2)}$ von einer beliebigen Ebene ε in einem Kegelschnitt $e^{(2)}$ getroffen wird, so sind

* *Monatshefte für Mathematik und Physik* Bd. XIV S. 92.

auch die Abstände der Punkte des Kegelschnitts $c^{(2)}$ von der Geraden f und der Ebene φ in konstantem Verhältnisse.

Ist umgekehrt ein Kegelschnitt $c^{(2)}$ und eine Ebene φ gegeben, welche mit $c^{(2)}$ keinen (reellen) gemeinsamen Punkt hat, so kann man immer eine Gerade f in der Weise bestimmen, daß die Abstände der Punkte der $c^{(2)}$ von f und φ in konstantem Verhältnisse stehen. Man muß nämlich durch $c^{(2)}$ einen solchen Kegel legen, daß der Polarstrahl f von φ zugleich Fokalstrahl des Kegels ist.

Es sei G der Pol der Geraden $(\varphi, \varepsilon) \equiv g$, in welchem φ die Ebene ε des Kegeschnitts $c^{(2)}$ trifft. Die konjugierten Polaren des Punktes G in bezug auf $c^{(2)}$ bilden eine elliptische Involution, und es gibt zwei in bezug auf ε symmetrische Achsen f, f', aus welchen jene konjugierten Polaren durch ein orthogonales Ebenenbüschel projiziert werden können. Diese Achsen treffen φ in den Punkten M, M'; und die Geraden f, f' sind nicht nur die Polarstrahlen der Ebene φ in bezug auf die Kegel $M \cdot c^{(2)}$ bezw. $M' \cdot c^{(2)}$, sondern zugleich die Fokalstrahlen dieser Kegel.

f und f' haben eine gemeinsame orthogonale Projektion auf der Ebene ε, welche leicht bestimmt werden kann. Es gehen nämlich durch G zwei orthogonale konjugierte Polaren; diese trennen die Brennpunkte F, F' des Kegelschnitts $c^{(2)}$ harmonisch. Also trifft eine dieser Polaren die durch die Brennpunkte in die Teile m und n zerlegte Hauptachse von $c^{(2)}$ in demjenigen Teile m, in welchem die Scheitelpunkte von $c^{(2)}$ liegen, die andere Polare in dem anderen Teil n; die erstere Polare ist die orthogonale Projektion der Geraden f, f'. Steht aber die Gerade $g \equiv (\varphi, \varepsilon)$ senkrecht auf der Hauptachse von $c^{(2)}$, und liegt somit der Pol G derselben auf dieser Hauptachse, so wird die orthogonale Projektion der Geraden f, f' entweder jene Hauptachse oder eine auf ihr senkrechte Gerade oder ein Brennpunkt sein, je nachdem G auf dem Teile m oder n oder in einem Brennpunkte selbst liegt. Daraus folgt:

Nimmt man in der Ebene ε eines Kegelschnitts $c^{(2)}$ eine Gerade g an, welche $c^{(2)}$ in keinem reellen Punkte trifft und deren Pol G ist, so kann man zwei in bezug auf ε symmetrische Geraden f, f' konstruieren, welche die Eigenschaft haben, daß die Ab-

stände der Punkte des Kegelschnitts $e^{(2)}$ von jeder durch g gehenden Ebene φ und der Geraden f oder f' in konstantem Verhältnisse stehen. Aus diesen Geraden f, f' werden die konjugierten Polaren des Punktes G durch orthogonale Ebenen projiziert.

Die orthogonale Projektion der Geraden f und f' auf die Ebene ε ist daher diejenige Winkelhalbierende der von G zu den Brennpunkten des Kegelschnitts $e^{(2)}$ gezogenen Geraden, welche die Hauptachse auf demselben Teil m trifft, auf welchem die Scheitelpunkte liegen. Ist aber G ein Punkt der Hauptachse, so steht jene orthogonale Projektion entweder senkrecht zu derselben oder fällt mit ihr zusammen oder fällt in einen der Brennpunkte, je nachdem G auf dem Teile m oder außerhalb desselben oder in einem Brennpunkte liegt.

36. Im folgenden müssen die verschiedenen Kegelschnitte einzeln betrachtet werden.

Es sei nun erstens der Kegelschnitt $e^{(2)}$ eine *Ellipse* (Fig. 11). In der Ebene ε derselben liegt die Gerade g, deren Pol G sich innerhalb $e^{(2)}$ befindet. Die von G ausstrahlenden, orthogonalen konjugierten Polaren p, q treffen g in den Punkten P, Q so, daß $GPQ \equiv gpq$ ein Polardreieck von $e^{(2)}$ ist. Je nachdem die Gerade g den Direktorkreis* $k^{(2)}$ nicht schneidet, berührt oder in reellen Punkten schneidet, liegen beide Punkte P, Q außerhalb $k^{(2)}$ oder liegt der eine Punkt Q im Berührungspunkte oder endlich liegt nur der Punkt Q außerhalb, der Punkt P aber innerhalb des Direktorkreises $k^{(2)}$. Denn P und Q sind konjugierte Punkte von $k^{(2)}$, da der dem rechtwinkligen Polardreieck GPQ umschriebene Kreis den $k^{(2)}$ orthogonal schneidet.

Die von Q zu $e^{(2)}$ gezogenen Tangenten t, t_1 berühren $e^{(2)}$ in den Schnittpunkten T, T_1 mit q und der Winkel TQT_1 ist ein spitzer. Die von Q ausstrahlenden konjugierten Polaren p, g trennen t, t_1 harmonisch, also bildet p, welche $e^{(2)}$ trifft, einen kleineren Winkel mit t und t_1 als g, und somit ist der Abstand TG (oder T_1G) des Punktes T (oder T_1) von p kleiner als von g.

Man kann daher durch die Gerade g eine solche Ebene φ

* D. h. denjenigen Kreis, aus dessen Punkten die zum Kegelschnitt gezogenen Tangentenpaare orthogonal sind.

führen, von welcher der Abstand des Punktes T der Strecke TG gleich ist. Wenn nun f eine derjenigen Geraden ist, aus welchen die konjugierten Polaren des Punktes G durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden, so ist die orthogonale Projektion von f auf die Ebene ε die Gerade p, und der Abstand des Punktes T von f und φ ist gleich TG, folglich haben alle Punkte der Ellipse $e^{(2)}$ einen gleichen Abstand von f und φ.

Also:

Durch jede Gerade g in der Ebene ε der Ellipse $e^{(2)}$, welche

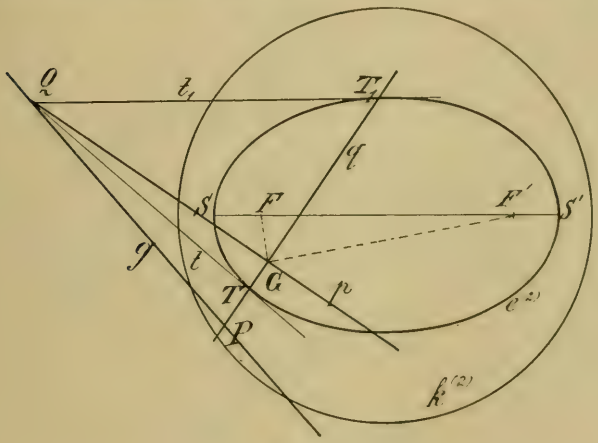


Fig. 11.

$e^{(2)}$ in keinen reellen Punkten schneidet, kann man zwei in bezug auf ε symmetrische Ebenen φ, φ' und durch den Pol G von g zwei in bezug auf ε symmetrische Geraden f, f' so legen, daß die Abstände der Punkte der Ellipse von den Ebenen und den Geraden gleich sei. Aus den Geraden f und f' werden die konjugierten Polaren des Punktes G durch orthogonale Ebenenpaare projiziert; und diese Geraden bestimmen schon mittels $e^{(2)}$ die Ebenen φ und φ'.

Diejenigen Kegel, welche den Kegelschnitt $e^{(2)}$ aus den vier Schnittpunkten der Ebenen φ, φ' und den Geraden f, f' projizieren, sind HACHETTEsche; denn diese Kegel haben die Eigenschaft, daß ihre Punkte von jedem ihrer Fokalstrahlen und der Polarebene derselben gleiche Abstände haben.

37. Es sei zweitens der Kegelschnitt $e^{(2)}$ eine *Parabel* (Fig. 12), welche von der Geraden g in keinen reellen Punkten getroffen wird. Die vom Pole G der g ausstrahlenden, orthogonalen konjugierten Polaren p, q treffen g in zwei Punkten Q, P, welche von der Leitlinie der Parabel $e^{(2)}$ gleiche Abstände haben. Liegen $e^{(2)}$ und der Punkt Q auf verschiedenen Seiten der Leitlinie, so bilden die von Q zu $e^{(2)}$ gezogenen Tangenten t, t_1 einen spitzen Winkel, und also haben die Treffpunkte T, T_1 der Geraden q mit $e^{(2)}$ wie

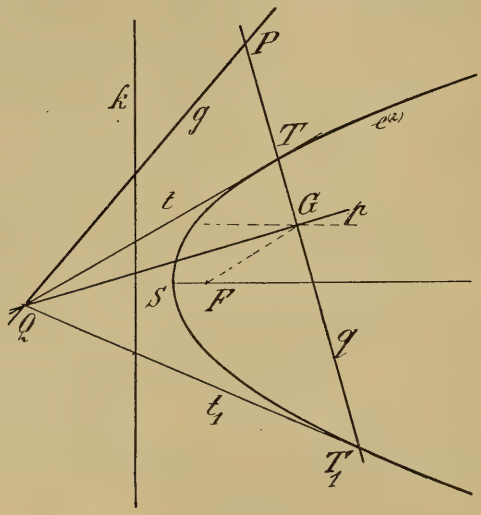


Fig. 12.

auch mit t, t_1 einen kleineren Abstand von G als von g. Man kann daher, wie früher, durch die Gerade g zwei Ebenen φ, φ', durch den Punkt G zwei Gerade f, f' so führen, daß die Abstände der Punkte der Parabel $e^{(2)}$ von denselben gleich seien.

Also:

Hat die in der Ebene ε der Parabel $e^{(2)}$ liegende Gerade g keine reellen gemeinsamen Punkte mit $e^{(2)}$, so kann man durch g zwei in bezug auf ε symmetrische Ebenen φ, φ' und durch den Pol G von g zwei ebenfalls in bezug auf ε symmetrische Geraden f, f' so führen, daß die Abstände der Punkte der Parabel $e^{(2)}$ von φ, φ', f, f' gleich seien. Aus f und f' werden die konjugierten Polaren des Punktes G durch orthogonale Ebenenpaare projiziert,

und diese Geraden f, f' bestimmen schon mittels $e^{(2)}$ die Ebenen φ und φ'.

Diejenigen Kegel, welche die Parabel $e^{(2)}$ aus den vier Schnittpunkten der Geraden und Ebenen f, f', φ, φ' projizieren, sind HACHETTEsche; sie gehen in einen parabolischen Zylinder über, wenn die Gerade g die Leitlinie der Parabel ist.

38. Nehmen wir drittens an, daß der Kegelschnitt $e^{(2)}$ (Fig. 13) eine solche *Hyperbel* sei, welche einen reellen Direktor-

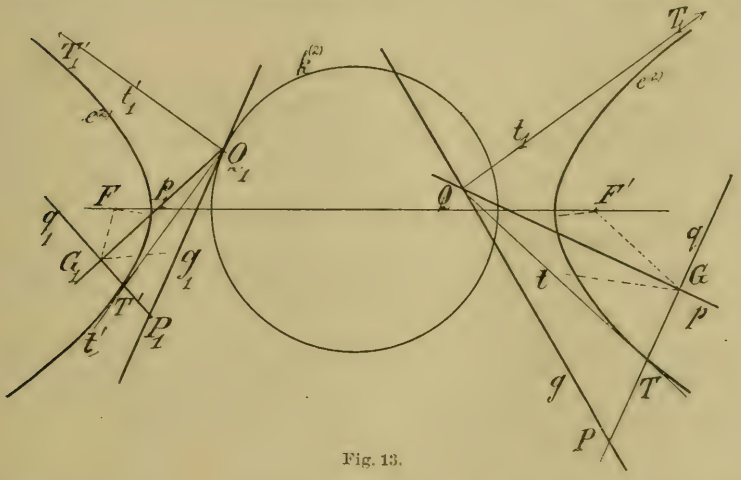


Fig. 13.

kreis $k^{(2)}$ hat, deren Asymptoten daher mit der Hauptachse einen kleineren Winkel bilden als 45°.

Nehmen wir die Gerade g in der Ebene ε der $e^{(2)}$ so an, daß sie $e^{(2)}$ in imaginären, $k^{(2)}$ aber in reellen Punkten treffe. Wenn die vom Pole G der Geraden g ausstrahlenden, orthogonalen konjugierten Polaren p, q g in den Eckpunkten Q, P des Polardreiecks $GPQ \equiv gpq$ treffen, und der diesem Dreiecke umschriebene Kreis den Direktorkreis $k^{(2)}$ orthogonal schneidet, so muß einer der Punkte P, Q, etwa Q, innerhalb, der andere, P, außerhalb $k^{(2)}$ liegen.

Die von Q zu $e^{(2)}$ gezogenen Tangenten t, t_1 berühren $e^{(2)}$ in T, T_1 so, daß der Winkel TQT_1 ein spitzer ist. Von den das Tangentenpaar t, t_1 harmonisch trennenden konjugierten Polaren p, q bildet die p, welche $e^{(2)}$ in reellen Punkten schneidet, mit t

und t_1 kleinere Winkel als g, also ist auch der Abstand TG des Punktes T von p kleiner als von g. Man kann daher durch g zwei solche Ebenen φ, φ' legen, von welchen die Abstände des Punktes T gleich sind mit TG. Andererseits kann man durch G zwei solche Geraden f, f' legen, daß p ihre orthogonale Projektion auf ε sei und daß aus ihnen die konjugierten Polaren des Punktes G durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden. Es haben daher alle Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von den Ebenen φ, φ' und den Geraden f, f' denselben Abstand wie der Punkt T, nämlich TG.

Trifft die Gerade g den Direktorkreis $k^{(2)}$ in keinen reellen Punkten, so kann man von keinem Punkte der Geraden g solche tangierende Halbstrahlen zu $e^{(2)}$ ziehen, welche einen spitzen Winkel bilden, und man kann daher durch g keine Ebenen, durch G keine Geraden so legen, daß die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von diesen gleich seien.

Berührt schließlich die Gerade g_1 den Kreis $k^{(2)}$ im Punkte Q_1, ohne $e^{(2)}$ zu treffen, so schneidet die Polare q_1 von Q_1 die g_1 im Punkte P_1. Der dem Polardreieck $G_1 P_1 Q_1$ umschriebene Kreis trifft $k^{(2)}$ in Q_1 orthogonal, also ist $P_1 Q_1$ ein Durchmesser jenes Kreises, und daher der Winkel $P_1 G_1 Q_1$ ein Rechter.

Die von Q_1 zu $e^{(2)}$ gezogenen Tangenten t', t'_1 sind orthogonal, also sind die Abstände ihrer Berührungspunkte T', T_1' von g_1 und von $Q_1 P_1 \equiv p_1$ einander gleich. Werden nun die vom Pole G_1 der Geraden g_1 ausstrahlenden konjugierten Polaren aus den Geraden f und f' (die in p_1 eine gemeinsame orthogonale Projektion haben) durch orthogonale Ebenenpaare projiziert, so haben die Punkte der Hyperbel $e^{(2)}$ von diesen Geraden f, f' und von derjenigen Ebene $\varphi \equiv \varphi'$, welche in g_1 auf ε senkrecht steht, gleiche Abstände.

Aus diesen Untersuchungen folgt:

1) Ist der Direktorkreis einer Hyperbel $e^{(2)}$ imaginär, d. h. bilden die Asymptoten einen größeren Winkel mit der Hauptachse als 45^0, so kann man durch keine Gerade g der Ebene ε der Hyperbel eine Ebene φ und durch ihren Pol G eine Gerade f so legen, daß die Abstände der Punkte der Hyperbel von φ und f gleich seien.

2) Ist die Hyperbel $e^{(2)}$ gleichseitig, zieht sich daher der Direktorkreis $k^{(2)}$ im Mittelpunkt zusammen, so kann man jeden Durchmesser g von $e^{(2)}$, welcher $e^{(2)}$ in keinen reellen Punkten trifft, als eine Tangente von $k^{(2)}$ betrachten. Der zu g konjugierte Durchmesser p ist die orthogonale Projektion einer zu p parallelen Geraden f; und die Punkte der $e^{(2)}$ haben von f und g, also auch von f und der in g auf die Ebene ε der $e^{(2)}$ senkrechten Ebene φ gleiche Abstände. Die Gerade f hat von ε den Abstand $a \cdot \sqrt{\sin 2\psi}$, wenn $2a$ die Hauptachse der Hyperbel und ψ den Winkel bedeutet, den eine ihrer Asymptoten mit g bildet.

Nach diesen Untersuchungen können wir sagen:

Bilden die Asymptoten einer Hyperbel $e^{(2)}$ mit ihrer Hauptachse einen kleineren Winkel als 45^0, ist also der Direktorkreis $k^{(2)}$ der $e^{(2)}$ reell, so kann man durch jede Gerade g der Ebene ε von $e^{(2)}$, welche $e^{(2)}$ in imaginären, $k^{(2)}$ aber in reellen Punkten schneidet, zwei in bezug auf ε symmetrische Ebenen φ, φ', durch den Pol G von g aber zwei ebenfalls in bezug auf ε symmetrische Geraden f, f' so legen, daß die Abstände der Punkte der $e^{(2)}$ von φ, φ', f, f' gleich seien. Fallen die Schnittpunkte von g und $k^{(2)}$ zusammen, so koinzidieren auch die Ebenen φ, φ' in eine zu ε senkrechte Ebene.

Ist die Hyperbel $e^{(2)}$ eine gleichseitige, so koinzidieren die Ebenen φ, φ' stets in eine zu ε senkrechte Ebene, welche ε in einem Durchmesser g von $e^{(2)}$ trifft; die Geraden f, f' sind aber parallel mit dem zu g konjugierten Durchmesser p und haben in p eine gemeinsame orthogonale Projektion.

Bilden schließlich die Asymptoten der $e^{(2)}$ mit der Hauptachse einen größern Winkel als 45^0, so gibt es keine Ebene φ und keine Gerade f, von welchen die Punkte der $e^{(2)}$ gleiche Abstände haben.

Im ersten und zweiten Falle werden die konjugierten Polaren des Punktes G von f und f' durch orthogonale Ebenenpaare projiziert. Im zweiten Falle haben f und f' von ε die Abstände $a \cdot \sqrt{\sin \cdot 2\psi}$, wenn $2a$ die Hauptachse, ψ aber den Winkel bedeutet, den g mit einer Asymptote derselben bildet.

Diejenigen Kegel, welche im ersten und zweiten Falle die Hyperbel $e^{(2)}$ aus den Schnittpunkten der Ebenen $\varphi\varphi'$ mit den Geraden ff' projizieren, sind hier ebenfalls HACHETTEsche. Und da ein HACHETTEscher Kegel von keiner Ebene in einer solchen

Hyperbel geschnitten werden kann, deren Asymptoten mit der Hauptachse einen größeren Winkel als 45^0 bilden, so war vorauszusehen, daß die Punkte einer solchen Hyperbel von keiner Ebene und Geraden gleiche Abstände haben können.

Aus den letzteren Untersuchungen folgt, daß man in der Ebene ε einer Hyperbel $e^{(2)}$, deren Direktorkreis $k^{(2)}$ reell ist, unendlich viele Gerade g (die Tangenten von $k^{(2)}$) und außerhalb ε ebenso viele Gerade f finden kann, von welchen die Punkte der Hyperbel gleiche Abstände haben. Dieselbe Eigenschaft haben auch (37) in bezug auf eine Parabel, die Leitlinie und die im Brennpunkte auf der Ebene der Parabel errichtete Normale. Wir können daher fragen, ob man im allgemeinen zu jedem Kegelschnitt $e^{(2)}$ solche Geradenpaare g, f finden kann, von welchen die Abstände der Punkte desselben ein konstantes Verhältnis haben. Diese Frage wollen wir im folgenden Abschnitte behandeln.

IV. Der Kegelschnitt als Ort von Punkten, deren Abstandsverhältnisse von zwei Geraden konstant sind.

39. Der Ort $F^{(2)}$ von solchen Punkten, deren Abstände von zwei Geraden f und g in konstantem Verhältnisse λ stehen, ist ein orthogonales Hyperboloid oder eine Entartung desselben, nämlich: ein orthogonaler Kegel, ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid oder ein orthogonales Ebenenpaar. Treffen sich die Geraden f und g, so ist $F^{(2)}$ ein orthogonaler Kegel oder ein orthogonales Ebenenpaar, im entgegengesetzten Falle ist $F^{(2)}$ eine der zwei anderen Flächen. Ist das Verhältnis λ gleich der Einheit, so ist $F^{(2)}$ ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid oder ein Ebenenpaar, im entgegengesetzten Falle eine der zwei anderen Flächen.*

In bezug auf alle vier Flächen ist f, g ein Polarenpaar, und die durch f und g gehenden konjugierten Polarebenen bilden je ein orthogonales Ebenenbüschel.

Eine beliebige Ebene ε trifft die Fläche $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt oder einem Geradenpaare, darum können wir fragen:

Wenn ein Kegelschnitt $e^{(2)}$ und eine Gerade f gegeben ist, wie

* Schröter, *Theorie der Oberfl. II. Ord.* (1880) S. 195; 74; 222.

konstruiert man eine solche Gerade g, daß die Abstände der Punkte des Kegelschnitts von f und g in konstantem Verhältnisse stehen?

Durch $e^{(2)}$ müssen wir ein solches orthogonales Hyperboloid $F^{(2)}$ (oder eine Entartung desselben) legen, daß die konjugierten Polarebenen durch f und auch durch die Polare g von f ein orthogonales Ebenenbüschel bilden sollen. Wir wollen nun unter diesen Bedingungen die Gerade g konstruieren. Zu diesem Zwecke benutzen wir folgende *Hilfssätze:*

40. 1) „Werden die konjugierten Pole P, P_1 einer Fläche II. Ordnung $F^{(2)}$ aus der Geraden r durch konjugierte Polarebenen projiziert, so werden sie auch aus der Polare r_1 von r durch konjugierte Polarebenen projiziert."

Beweis. Die Pole der konjugierten Polarebenen $[Pr]$, $[P_1 r]$ sind die Treffpunkte A, B der Geraden r_1 mit den Ebenen $[P_1 r], [Pr]$. Die Geraden $P_1 A, PB$ treffen r in den Punkten C, D.

Die Polarebene von P_1 geht durch P, die von C durch r_1, und die Polarebene von A ist die Ebene $[Pr]$. Da aber die Punkte P_1, C, A in einer Geraden liegen, so müssen sich ihre Polarebenen in einer Geraden, der Polare von $P_1 CA$, treffen. Von den durch P und r_1 gehenden Ebenen treffen sich aber nur diejenigen in einer Geraden der Ebene $[Pr]$, welche durch die Gerade PBD gehen; also ist PBD die Polare von $P_1 CA$.

Daraus folgt, daß $ABCD$ ein Polartetraeder ist, und somit die Ebenen $[PDAB] \equiv [Pr_1]$, $[P_1 CAB] \equiv [P_1 r_1]$ konjugierte Polarebenen sind.

2) „Trennen die Punkte A, B harmonisch diejenigen Erzeugenden $s_1 s_2$ eines orthogonalen Kegels $M^{(2)}$, welche aus den übrigen Erzeugenden durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden, so ist das Verhältnis der Abstände der Punkte A, B von den Erzeugenden des Kegels $M^{(2)}$ ein konstantes."

Beweis. Da die Strahlen $MA \equiv a$, $MB \equiv b$, welche die Punkte A, B aus dem Scheitel M des Kegels $M^{(2)}$ projizieren, konjugiert sind, so ist, wenn x eine beliebige Erzeugende des Kegels bedeutet*,

$$\frac{\sin(a,x)}{\sin(b,x)} = \lambda = \text{const.}$$

* Schröter a. a. O. S. 73.

Aber die Abstände der Punkte A, B von x sind $MA \cdot \sin(a, x)$, $MB \cdot \sin(b, x)$; also ist das Verhältnis derselben $\frac{MA}{MB} \cdot \lambda$ unabhängig von x, also konstant.

Wir können auch sagen:

Der Ort der Geraden x, welche durch den Eckpunkt M des Dreiecks MAB gehen und deren Abstände von den zwei anderen Eckpunkten des Dreiecks in konstantem Verhältnisse stehen, ist ein orthogonaler Kegel. Die in der Ebene des Dreiecks liegenden Erzeugenden desselben werden aus den übrigen durch orthogonale Ebenenpaare projiziert.

41. Kehren wir jetzt zurück zu unserer Aufgabe und bezeichnen wir die Spur der Geraden f auf der Ebene ε des Kegelschnitts $e^{(2)}$ mit U, die Polare dieses Punktes in bezug auf $e^{(2)}$ mit u.

Das orthogonale Ebenenbüschel f trifft ε in einem involutorischen Strahlenbüschel U, von welchem ein konjugiertes Strahlenpaar vw zugleich konjugiertes Polarenpaar ist in bezug auf $e^{(2)}$. Diese Strahlen treffen u in den Punkten V, W, so daß das Dreieck $UVW \equiv uvw$ Polardreieck ist von $e^{(2)}$. Es mögen die Eckpunkte U, W außerhalb, der Eckpunkt V innerhalb $e^{(2)}$ liegen.

Nun wollen wir eine Gerade g mit der Bedingung konstruieren, daß diejenigen konjugierten Pole von $e^{(2)}$, welche aus f durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden, auch von g aus durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden sollen.

Nachdem W und ein beliebiger Punkt von w, ferner V und ein beliebiger Punkt von v solche konjugierte Punkte sind von $e^{(2)}$, welche aus f durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden, so muß die Gerade g entweder durch W oder durch V gehen.

Es seien A, B die Treffpunkte von u mit $e^{(2)}$, C ein beliebiger Punkt von $e^{(2)}$; ferner seien X, Y diejenigen konjugierten Pole auf der Sehne AC, welche aus f durch ein orthogonales Ebenenpaar projiziert werden.

Das Punktpaar XY ist durch vw getrennt, denn UX, UY und v, w sind konjugierte Strahlen einer elliptischen Involution. Das Punktpaar XY wird also entweder noch durch die Seitenpaare uv oder die Seitenpaare uw des Dreiecks uvw getrennt;

also werden entweder die Strahlenpaare WX, WY; u, v oder die Strahlenpaare UX, UY; u, w konjugierte Strahlenpaare einer elliptischen Involution sein, und daher werden sie aus einer durch W oder U gehenden Geraden g mittels orthogonaler Ebenenpaare projiziert. Da aber der Punkt U außerhalb $e^{(2)}$ liegt, so muß g durch den innerhalb $e^{(2)}$ liegenden Punkt V gehen.

Diese Gerade g hat nun die Eigenschaft, daß das Verhältnis der Abstände der Punkte $e^{(2)}$ von f und g ein konstantes ist.

Nämlich: Der Ort der Punkte, deren Abstandsverhältnis von f und g gleich ist dem Abstandsverhältnisse $(A, f) : (A, g)$ des Punktes A von f und g, ist ein durch A gehendes orthogonales Hyperboloid $F^{(2)}$. Diese Fläche geht auch durch B und C, denn wegen der orthogonalen Kegel $U(fAB\ldots)$, $U(fXY\ldots)$, $V(gXY\ldots)$ ist nach den 2. Hilfssatz

$$(A, f) : (B, f) = AV : BV = (A, g) : (B, g),$$
$$(A, f) : (C, f) = AX : CY = (A, g) : (C, g),$$

also

$$(A, f) : (A, g) = (B, f) : (B, g) = (C, f) : (C, g).$$

Andererseits ist $[ug]$ die Polarebene des Punktes U in bezug auf $F^{(2)}$, denn sie steht senkrecht auf der Ebene $[Ug]$.

Die Fläche $F^{(2)}$ trifft daher die Ebene ε in einem durch die Punkte A, B, C gehenden Kegelschnitt, in bezug auf welchen die Polare des Punktes U die Gerade u ist, d. h. in dem Kegelschnitt $e^{(2)}$. Es haben daher alle Punkte von $e^{(2)}$ dasselbe Abstandsverhältnis von den Geraden f und g.

Um daher zu einem in der Ebene ε liegenden Kegelschnitt $e^{(2)}$ und einer Geraden f eine Gerade g so zu konstruieren, daß das Abstandsverhältnis der Punkte der $e^{(2)}$ von f und g ein konstantes sei, haben wir folgende Konstruktionen auszuführen:

1) Trifft die Polare u des Punktes $U \equiv (\varepsilon, f)$ den Kegelschnitt $e^{(2)}$ in den Punkten A, B, so sei V derjenige Punkt, welcher AB nach dem Verhältnisse der Abstände $(A, f), (B, f)$ der Punkte A, B von f teilt und zwar innerhalb. Auf $e^{(2)}$ nehmen wir zwei beliebige Punkte, z. B. A und C an und teilen ihre Verbindungslinie ebenfalls in dem Verhältnisse der Abstände der angenommenen Punkte von f: es seien diese Teilpunkte X, Y.

Diejenige durch V gehende Gerade, aus welcher die Strahlen-

paare VX, VY und VU, u durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden, ist die gewünschte Gerade g.

2) Trifft aber die Polare u des Punktes $U \equiv (\varepsilon, f)$ den Kegelschnitt $e^{(2)}$ in keinen reellen Punkten, so suchen wir diejenigen durch U gehenden konjugierten Polaren v, w von $e^{(2)}$, welche aus f durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden. Diese treffen u in einem der Punkte WV, durch welche die gewünschte Gerade g gehen muß.

Nun nehmen wir auf $e^{(2)}$ zwei beliebige Punkte P, Q an und teilen ihre Verbindungslinie in den Punkten X, Y nach dem Verhältnisse der Abstände der Punkte P, Q von f. Das Punktpaar XY ist entweder durch uv oder durch uw getrennt. Im ersten Falle werden die Strahlenpaare uv; WX, WY, im zweiten Falle werden die Strahlenpaare uw; VX, VY aus der gesuchten Geraden g durch orthogonale Ebenenpaare projiziert.

Anmerkung. Ist die Gerade f senkrecht zu einer Achse von $e^{(2)}$ (ohne dieselbe zu schneiden), so bildet die zu dieser Achse senkrechte Ebene von f mit der zu derselben Achse parallelen Ebene von f ein orthogonales Ebenenpaar, welches die unendlich ferne Gerade der Ebene ε in konjugierten Polen von $e^{(2)}$ trifft. Es werden also diese konjugierten Pole auch aus der Geraden g durch ein orthogonales Ebenenpaar projiziert, woraus dann folgt, daß g ebenfalls senkrecht ist zu einer Achse des Kegelschnitts $e^{(2)}$.

Die Resultate dieser Untersuchungen können mit Rücksicht auf den I. Abschnitt so ausgesprochen werden:

Ist ein Kegelschnitt $e^{(2)}$ und eine Gerade f gegeben, so kann man immer eine solche Gerade g (und ihr Spiegelbild in bezug auf die Ebene ε von $e^{(2)}$) finden, daß das Abstandsverhältnis der Punkte des Kegelschnittes von den Geraden f und g ein konstantes sei. Diejenigen konjugierten Pole von $e^{(2)}$, welche aus f durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden, werden auch aus g durch orthogonale Ebenenpaare projiziert, und unter dieser Bedingung kann g konstruiert werden.

Ist die Gerade f senkrecht zu einer Achse von $e^{(2)}$, so ist auch die Gerade g senkrecht zu dieser oder zur andern Achse von $e^{(2)}$, jenachdem man einen solchen imaginären oder einen solchen reellen Punkt F finden kann, daß die Abstandsverhältnisse der Punkte der $e^{(2)}$ von f und F konstante seien.

Trifft die Gerade f den Kegelschnitt $e^{(2)}$, so koinzidiert g mit derselben. Liegt f in der Ebene von $e^{(2)}$ (ohne $e^{(2)}$ zu treffen), so geht g durch den Pol von f und projiziert die konjugierten Pole auf f durch orthogonale Ebenenpaare.

42. Sehen wir jetzt, wie man die betrachtete Aufgabe in dem Falle löst, wenn der Kegelschnitt $e^{(2)}$ eine Parabel ist und die Gerade f auf ihrer Achse senkrecht steht und die Ebene ε der $e^{(2)}$ in dem außerhalb $e^{(2)}$ liegenden Punkte U trifft.

Es seien wieder die Schnittpunkte der Polaren u von U mit $e^{(2)}$ die Punkte A, B; ferner teile der Punkt V die Sehne AB in dem Abstandsverhältnisse der Punkte A, B von der Geraden f.

Die gesuchte Gerade g geht durch diesen Punkt und steht entweder auf der Leitlinie oder auf der Achse der Parabel senkrecht, jenachdem die Schenkel der spitzen Winkel der Geraden UV und u von einer zur Leitlinie oder von einer zur Achse der Parabel senkrechten und durch V gehenden Ebene getrennt werden, — was allein von dem Neigungswinkel der Geraden f und der Ebene ε abhängig ist.

Im ersten Falle ist das Abstandsverhältnis der Punkte der Parabel von f und g von der Einheit verschieden; im zweiten Falle aber ist dieses Abstandsverhältnis der Einheit gleich, sodaß die Punkte der Parabel von f und g einen gleichen Abstand haben. Mit anderen Worten: Der Ort der Punkte, deren Abstandsverhältnis von den Geraden f und g konstant ist, entartet im zweiten Falle in ein gleichseitig hyperbolisches Paraboloid.

Den zweiten Fall vorausgesetzt, daß nämlich sowohl f wie auch g auf der Achse der Parabel senkrecht stehen, schneide man die vom Punkte A beschriebene und die Gerade f berührende Kugel mit dem durch A gehenden Parabeldurchmesser in den Punkten X, Y. Diese sind solche konjugierte Pole der Parabel, welche aus f und also auch aus g durch ein orthogonales Ebenenpaar projiziert werden.

Daraus folgt aber, daß der Abstand des Punktes A von der Geraden g gleich ist seinem Abstande von den Punkten X, Y und also auch seinem Abstande von der Geraden f. Es haben daher alle Punkte der Parabel $e^{(2)}$ einen gleichen Abstand von f und g.

In diesem zweiten Falle treffen sich die vom Punkte der $e^{(2)}$, die Gerade f berührend, beschriebenen Kugeln in einem imaginären Punktpaar FF', während sich diese Kugeln im ersten Falle, wenn g zur Leitlinie der Parabel senkrecht ist, in reellen Punkten treffen. Im ersten Falle haben daher die Punkte der Parabel $e^{(2)}$ von f und F (oder F') gleiche Abstände und von g und F (oder F') Abstände, deren Verhältnis konstant ist.

43. Nehmen wir wieder einen Kegelschnitt $e^{(2)}$ an. $UVW \equiv uvw$ sei ein Polardreieck desselben, dessen Scheitelpunkt V innerhalb $e^{(2)}$ liegt. Das Dreieck UVW bestimmt drei orthogonale Kegel $U^{(2)}$, $V^{(2)}$, $W^{(2)}$, deren Scheitel die Punkte U, V, W sind und aus deren Erzeugenden die Seitenpaare vw, wu bezw. uv des Dreieckes durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden.

Es seien X_iX_i' veränderliche konjugierte Pole von $e^{(2)}$ auf der Geraden x, und die dadurch bestimmte Involution sei durch (X_iX_i') bezeichnet.

Die Strahlenpaare UV, UW; UX_i, UX_i' bestimmen eine Involution, deren Achsen f_i, f_i' sind. Die durch diese Achsen gehenden und auf der Ebene ε von $e^{(2)}$ senkrecht stehenden Ebenen treffen den Kegel $U^{(2)}$ in den in bezug auf ε symmetrischen Erzeugendenpaaren $f_i^1 f_i^2$, $f_i^3 f_i^4$, aus welchen jene Strahleninvolution durch orthogonale Ebeneninvolutionen projiziert wird (41.).

Bewegt sich das konjugierte Punktepaar X_iX_i' in der Involution (X_iX_i'), so beschreiben die Achsenpaare f_if_i' der ∞^1 Strahleninvolutionen, welche durch die Strahlenpaare UV, UW; UX_i, UX_i' bestimmt sind, eine zu (X_iX_i') projektive orthogonale Strahleninvolution.

Es treffen nämlich die Strahlen UV, UW einen aus dem Punkte K mit dem Radius UK beschriebenen Kreis $k^{(2)}$ noch in zwei Punkten, dessen Verbindungsgerade u_1 sei. Ferner ist die Projektion der Involution (X_iX_i') aus U auf $k^{(2)}$ eine Involution (Y_iY_i'), deren Pol (Involutionszentrum) mit Y bezeichnet werden soll. Schließlich treffen die veränderlichen Geraden $Y_iY_i'Y$ die Gerade u_1 in den Punkten U_i, und die Endpunkte der Kreisdurchmesser U_iK werden aus U durch die Strahlenpaare f_if_i' der Involution (f_if_i') projiziert.

Bewegt sich nun das Punktpaar $X_i X_i'$ in der Involution $(X_i X_i')$, also $Y_i Y_i'$ in der Involution $(Y_i Y_i')$, so dreht sich der Strahl $Y_i Y_i' Y$ um Y und der Punkt U_i beschreibt auf u_1 eine mit diesem Büschel projektive Reihe, also beschreibt der Kreisdurchmesser $U_i K$ um K ein mit jenem Büschel projektives Büschel. Daraus folgt aber, daß die Involutionen $(X_i X_i')$ und $(f_i f_i')$ projektiv sind.

Verbinden wir jetzt die zwei anderen Eckpunkte V, W des Dreieckes UVW mit den konjugierten Polen $X_i X_i'$. Die Strahlenpaare VW, VU; VX_i, VX_i', sowie WU, WV; WX_i, WX_i' bestimmen je eine Involution, deren Achsen wir mit $g_i g_i'$, $h_i h_i'$ bezeichnen wollen. Die Ebenenpaare, welche in diesen Achsen auf ε senkrecht stehen, treffen die Kegel $V^{(2)}$, $W^{(2)}$ in den symmetrischen Erzeugendenpaaren $g_i^1 g_i^2$, $g_i^3 g_i^4$ bezw. $h_i^1 h_i^2$, $h_i^3 h_i^4$, aus welchen ebenfalls die Strahlenpaare jener Involutionen durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden.

Bewegt sich nun das Punktpaar $X_i X_i'$ in der Involution $(X_i X_i')$, so beschreiben jene Achsenpaare $g_i g_i'$, $h_i h_i'$ mit dieser Involution projektive Involutionen $(g_i g_i')$, $(h_i h_i')$, so daß diese auch mit der Involution $(f_i f_i')$ projektiv sind.

Diese drei projektiven Involutionen $(f_i f_i')$, $(g_i g_i')$, $(h_i h_i')$ stehen aber in der Beziehung zum Kegelschnitt $c^{(2)}$, daß zu jeder reellen Erzeugenden g_i^k von $V^{(2)}$, deren orthogonale Projektion ein Strahl von $(g_i g_i')$ ist, eine solche reelle Erzeugende f_i^k von $U^{(2)}$ oder eine solche reelle Erzeugende h_i^k von $W^{(2)}$ gehört, deren orthogonale Projektion ein entsprechender Strahl der Involution $(f_i f_i')$ oder $(h_i h_i')$ ist, und die Abstände der Punkte des Kegelschnittes $c^{(2)}$ von g_i^k, f_i^k oder g_i^k, h_i^k in konstantem Verhältnis stehen (41).

Die Kegel $U^{(2)}, W^{(2)}$ haben die gemeinsame Erzeugende $c = f_0 = h_0$ in der Ebene ε. Zu dieser gehört dasjenige symmetrische Erzeugendenpaar $g_0^1 g_0^2$ von $V^{(2)}$, aus welchem die konjugierten Pole auf der Geraden c durch orthogonale Ebenenpaare projiziert werden. Die Erzeugenden teilen den Kegel $V^{(2)}$ in die zwei Teile $g_0^1 u g_0^2$ und $g_0^1 u g_0^2$. Zu den in dem ersten Teil liegenden Erzeugenden g_i^k gehören die auf $U^{(2)}$ liegenden Erzeugenden f_i^k, während zu den in dem andern Teile liegenden Erzeugenden g_i^k die auf $W^{(2)}$ sich befindenden Erzeugenden h_i^k gehören.

44. *Es wird nun unsere Aufgabe sein, solche zusammengehörige Erzeugende* f_i^k, g_i^k *oder* h_i^k, g_i^k *der Kegel* $U^{(2)}, V^{(2)}$ *oder* $W^{(2)}, U^{(2)}$ *zu finden, von welchen die Punkte des Kegelschnittes* $e^{(2)}$ *gleiche Abstände haben.*

Hat ein Punkt des Kegelschnittes $e^{(2)}$ gleiche Abstände von den zusammengehörigen Erzeugenden f_i^k, g_i^k, so haben alle Punkte von $e^{(2)}$ gleiche Abstände von diesen Geraden. Wir wollen also die zusammengehörigen Erzeugenden f_i^k, g_i^k der Kegel $U^{(2)}, V^{(2)}$ so bestimmen, daß ein Treffpunkt A des Kegelschnitts $e^{(2)}$ und der Geraden $w \equiv UV$ von jenen gleiche Abstände hat.

Wir betrachten die Strecke AW als Durchmesser einer Kugel $\gamma^{(2)}$. Diese trifft die Kegel $U^{(2)}V^{(2)}$ erstens in ihrem gemeinsamen Kreise $w^{(2)}$, dessen Ebene durch W gehend auf w senkrecht steht. Außer diesem trifft $\gamma^{(2)}$ jene Kegel noch in den Kreisen $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{v}^{(2)}$, deren Ebenen durch A gehend auf v bezw. u senkrecht stehen und also die Ebene ε von $e^{(2)}$ in den auf u bezw. v senkrechten Geraden $\bar{u}, \bar{v}$ schneiden. Diese Kreise $\bar{u}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}$ sind die Orte der Fußpunkte der von A auf die Erzeugenden der Kegel $U^{(2)}$, $V^{(2)}$ gefällten Senkrechten.

Daraus folgt: Eine jede zu AW senkrechte Ebene λ trifft die Kreise $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{v}^{(2)}$ in solchen Punkten, daß die durch diese Treffpunkte gehenden Kegelerzeugenden f^k, g^k von dem Punkte A gleiche Abstände haben. Verbindet man daher die Punkte U und V mit denjenigen Punkten, in welchen eine zu AW senkrechte Gerade l der Ebene ε die Geraden $\bar{u}$ bezw. $\bar{v}$ trifft, durch die Geraden f und g, so sind diese die orthogonalen Projektionen von solchen Kegelerzeugenden f^k und g^k, welche vom Punkte A gleiche Abstände haben. Die Geraden f und g beschreiben aber bei Veränderung der Senkrechten l zwei projektive Büschel (f) und (g) um U und V in der Ebene ε.

Wir müssen nun in den früheren projektiven involutorischen Strahlenbüscheln $(f_i f_i')$, $(g_i g_i')$ solche entsprechende Strahlen suchen, welche in den projektiven einfachen Strahlenbüscheln (f), (g) ebenfalls entsprechend sind.

Nun entspricht dem involutorischen Strahlenbüschel $(f_i f_i')$ in (f) infolge der letzteren projektiven Beziehung ein involutorisches Strahlenbüschel $(j_i j_i')$ in (g), welches zugleich mit $(g_i g_i')$ projektiv

ist. Jedem der gemeinsamen entsprechenden Strahlen g in $(g_i g_i')$, $(j_i j_i')$ entspricht daher je ein Strahl f in (f) in der Weise, daß diese g und f die orthogonalen Projektionen von solchen Erzeugenden g^k und f^k der Kegel $U^{(2)}$ und $U^{(2)}$ sind, welche von allen Punkten des Kegelschnittes $c^{(2)}$ gleiche Abstände haben.

Da nun die einfachen Strahlenbüschel (f), (g) und die involutorischen Strahlenbüschel $(f_i f_i')$, $(g_i g_i')$ in w einen gemeinsam entsprechenden Strahl haben, welcher daher auch in $(g_i g_i')$, $(j_i j_i')$ gemeinsam entsprechend ist, so ist die Gerade w schon die eine jener vier Geraden g, und zwar eine solche, welche mit der entsprechenden f koinzidiert. Es gibt daher nur noch drei Gerade g, nämlich g_1, g_2, g_3, welchen die Geraden f_1, f_2, f_3 entsprechen, und von welchen eine oder alle drei entsprechenden Paare $g_i f_i$ reell sind.

Aber selbst das reelle Geradenpaar $g_i f_i$ bedingt nicht notwendigerweise reelle Erzeugende $g_i^k f_i^k$ auf den Kegeln $U^{(2)}$, $U^{(2)}$. Denn im Falle, daß der Kegelschnitt eine Ellipse ist, können die Erzeugenden g_i^k, f_i^k niemals reell sein, da das gleichzeitige hyperbolische Paraboloid von keiner Ebene in einer Ellipse geschnitten werden kann. Ist aber $c^{(2)}$ eine Parabel, so kann schon ein Paar der Kegelerzeugenden g_i^k, f_i^k reell sein, welches dann senkrecht steht auf der Achse der Parabel, wie wir unter 42 gesehen haben. Auch im Falle, daß $c^{(2)}$ eine Hyperbel ist, können die Erzeugendenpaare g_i^k, f_i^k reell sein, da das hyperbolische Paraboloid hyperbolische ebene Schnitte hat. Alles zusammengefaßt haben wir den Satz:

Durch ein konjugiertes Polenpaar einer Hyperbel, welches durch die Hyperbel getrennt ist, kann man höchstens drei solche Geradenpaare legen, von welchen die Punkte der Hyperbel gleiche Abstände haben. Die Aufgabe, welche die Lösung bewirkt, ist dritten Grades.

6.

ÜBER DIE PHYSIOLOGISCHE FUNKTION DER SPEICHELDRÜSEN DER WEINBERGSCHNECKE (HELIX POMATIA L.).

Von ALEXANDER GORKA, Universitätsassistent.

Mitteilung aus dem zoologischen Institute der Königl. Ungarischen Universität zu Budapest.

Aus Állattani Közlemények, Bd. III, pp. 211—226.

Schon in jenen längstvergangenen Zeiten, als die heutige moderne Zoologie mit SWAMMERDAMMS und CUVIERS grundlegenden Arbeiten kaum begann, untersuchte man den Organismus der Weinbergschnecke, und auch seither befaßten sich so viele mit demselben, daß sowohl die Anatomie, wie auch die Histologie dieses gewöhnlichen Tieres im wesentlichen vollkommen bekannt ist und jetzt zu den am besten und gründlichsten ausgearbeiteten Teilen der Zoologie gehört. Unsere Kenntnisse über die Physiologie der Weinbergschnecke stehen jedoch noch so sehr auf der ersten Stufe unseres Wissens, daß wir über ihre gewöhnlichsten Lebensfunktionen wenig Aufklärung und nur gänzlich widersprechende Angaben in der Literatur finden. Ziehen wir jedoch den Umstand in Betracht, daß die Physiologie der wirbellosen Tiere bis zur neuesten Zeit ein Stiefkind der Zoologie war, so kann es uns auch nicht überraschen, daß man sich so wenig und so lückenhaft mit der physiologischen Funktion der Speicheldrüsen aller Schnecken befaßte, obwohl die dem fälschlich Magen genannten Mitteldarm anliegenden und mächtig entwickelten Speicheldrüsen schon die Aufmerksamkeit der ersten Beobachter auf sich zogen.

Schon SWAMMERDAMM* untersuchte diese Drüsen so genau, daß sogar die mit vollkommeneren Instrumenten arbeitenden jetzigen Forscher an seiner Beschreibung nichts ändern konnten. Auf Grund der Untersuchungen von SEMPER**, LEYDIG***, BARFURTH†, MONTI†† und LANGE††† wurden wir dann mit ihrer feineren Struktur bekannt. Die erste Angabe über ihre physiologische Funktion finden wir in der Arbeit SEMPERS†*, der, in Ermangelung physiologischer Versuche nur aus der anatomischen Struktur schließend, der Ansicht war, daß das Sekret der Speicheldrüsen ausschließlich mechanische Wirkung besitzt und nur zum Schlüpfrigmachen der Nahrung dient. Nach ihm stellte KRUKENBERG†** mehrere Verdauungsversuche an, konnte jedoch in keinem einzigen Falle ein diastatisches Enzym nachweisen, weshalb er vom Standpunkte der Funktion die Benennung „Speicheldrüsen" für ganz falsch hält. Wahrscheinlich hierauf gestützt, bezeichnet HALLER†*** die morphologisch gleichwertigen Speicheldrüsen von unbekannter Funktion der Prosobranchier, als buccale Drüsen. BARFURTH*† befaßte sich mit der glycogenbildenden Wirkung der Speicheldrüsen und entdeckte einen überraschenden Zusammenhang zwischen der Absonderung und der Glycogenbildung. Nach seiner Ansicht entsteht das Glycogen in den Drüsenzellen wahrschein-

---

* Bibel der Natur, Leipzig, 1752, p. 54—55.

** Beiträge zur Anat. u. Physiol. d. Pulmonaten; Zeitschrift f. wiss. Zoologie, VIII (3), p. 364—366.

*** Über Paludina vivipara; Zeitschrift f. wiss. Zoologie, II, 1850.

† Vergleichend-histochemische Untersuchungen über Glycogen; Archiv f. mikr. Anat., XXV, p. 259—404.

†† Le ghiandole salivari dei Gastropodi terrestri nei diversi periodi funzionale. — Mem. Ist. Lomb. Sc. Milano, XVIII, p. 115—133 und XXXII, p. 534—535; Boll. Sc. Pavia Anno, 21, p. 19—25.

††† Über den Bau und die Funktion der Speicheldrüsen bei den Gastropoden; Anat. Hefte, Erste Abt. XIX., 1902, p. 85—153.

†* L. c., p. 365.

†** Vergleichend-physiolog. Beiträge zur Kenntnis der Verdauungsvorgänge, Untersuchungen aus dem Physiol. Institute d. Univ. Heidelberg, II (1), 1878, p. 15—16.

†*** Bronns Klassen und Ordnungen des Tierreichs, III. Leipzig, 1901, p. 492.

*† Zit. Abhandlung, p. 366—386.

lich als Nebenprodukt bei der Bildung des Speichels (Mucins) aus den Eiweißmolekülen; das so gebildete Glycogen wird jedoch bei der neuerlichen Funktion der Drüsenzellen zur Regeneration der Eiweißmoleküle und bei der mit der Drüsenfunktion verbundenen stärkeren Oxydation verbraucht.

Somogyi* stellte in Verbindung mit der anatomischen und histologischen Untersuchung der Speicheldrüsen auch physiologische Versuche an, aus denen wir, wie er meint, deutlich ersehen können, daß das Sekret der Speicheldrüse auf die Fette überhaupt nicht einwirkt, auf die eiweißähnlichen Substanzen nur eine kleine Wirkung ausübt, während es die Stärke verändern kann, und daß daher die Drüse ihrem Namen, Speicheldrüse, auch in bezug auf ihre physiologische Funktion entspricht" (p. 28). Die Resultate der oberflächlichen physiologischen Untersuchungen Somogyis müssen wir jedoch vollkommen außer acht lassen, da er erstens keine Kontrollversuche anstellte und zweitens zur Ausschließung der Bakterienwirkung kein Antiseptikum anwandte. Auf die Umwandlung der Stärke in Zucker, d. h. auf ihre Verdauung, schloß er aus dem positiven Resultat der Trommerschen Probe; die von ihm nach ein bis zwei Stunden bei gewöhnlicher Temperatur beobachtete Reduktion stammte jedoch keineswegs von Traubenzucker, sondern von den aus den Speicheldrüsen extrahierten Mucinen, die Somogyi vor der Ausführung der Trommerschen Probe samt den Eiweißsubstanzen nicht durch Fällung entfernt hat. Ich will nur nebenbei bemerken, daß er in seiner Abhandlung die Methoden seiner Untersuchungen nirgends erwähnt, daß er über die Konzentration der Stärkelösung keine Aufklärung gibt und von „feinem Öl", „feinem Fibrin" und von „andern Kohlehydraten" spricht.

Von histologischem und physiologischem Standpunkte, mit auf der Höhe der heutigen Wissenschaft stehenden modernen Methoden untersuchte Lange** im Jahre 1902 die Speicheldrüsen

* Beiträge zur Anatomie, Histologie und Physiologie des Ernährungstraktus der Weinbergschnecke (*Helix pomatia L.*). Budapest 1887. Ungarisch. Inaugural-Dissertation.

** Anat. Hefte, Erste Abt., XIX, 1902, p. 139.

der Weinbergschnecke und gelangte zu dem Resultate, daß der Speichel des Tieres kein auf Stärke oder Eiweiß wirkendes Enzym enthält und daher nur seine mechanische Rolle in Betracht kommen kann. Außerdem enthält nach seiner Meinung der reine Speichel kein Glycogen.

Mit der Erwähnung der Resultate LANGES haben wir auch die Reihe der Abhandlungen erschöpft, die in bezug auf die Physiologie der Speicheldrüsen der Weinbergschnecke selbständige Untersuchungen enthalten. Nach den Resultaten der bisherigen Untersuchungen besitzt also das Sekret der Speicheldrüsen nur eine mechanische Wirkung und spielt für die Verdauung keine wichtige direkte Rolle.

Die Aufgabe meiner Untersuchungen bestand darin, in erster Reihe mich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Resultate der erwähnten Forscher zu überzeugen und dann unsere Kenntnisse über die physiologische Funktion der Speicheldrüsen der Weinbergschnecke durch neue Versuche möglichst zu vermehren. Um reinen Speichel zu erhalten, reizte ich auf einem ausgehöhlten Objektträger die präparierten Speicheldrüsen mehrerer Schnecken mit Hilfe des elektrischen Stromes. Der so erhaltene Speichel ist fadenziehend, wasserklar, und nur bei 600facher Vergrößerung kann man in demselben feine, starklichtbrechende Körnchen wahrnehmen. Hierbei zeigt er starke alkalische Reaktion, bläut roten Lakmus und färbt eine 1 %ige alkoholische Phenolphtaleïnlösung hellrot. An der Luft wird er trübe und gerinnt endlich. Durch die Wirkung des Alkohols, der Essig- und Gerbsäure gerinnt er sofort. Mit Barytwasser erhalten wir keinen Niederschlag, und mit Jodtinktur können wir die bekannte kastanienbraune Farbe des Glycogens nicht wahrnehmen, weshalb ich die Angaben BARFURTHS und LANGES, daß der reine Speichel kein Glycogen enthält, bestätigen kann.

Die Histologen schlossen auf Grund der mit Thionin, MAYERschen Mucikarmin- und Hämatoxylinfarben erhaltenen Reaktionen auf das Vorhandensein von Mucin; LANGE konnte jedoch im Extrakt der Speicheldrüsen nach dem Verfahren* von HAMMAR-

* Studien über Mucin u. mucinähnliche Substanzen. Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie, XXXVI, p. 319.

STEN und LANDWEHR mit rein chemischen Methoden Mucin nicht nachweisen, so daß wir nicht wußten, ob die in den Speicheldrüsen vorkommende und auf Thionin, Mucikarmin und Hämatoxylin reagierende Substanz wirklich Mucin ist oder nicht. Zur Entscheidung dieser Frage zerrieb ich die präparierten Speicheldrüsen von 20 Schnecken, nach mehrmaligem Auswaschen mit dest. Wasser, mit Quarzpulver zu einem Brei; den Brei verdünnte ich mit dest. Wasser auf 30 cm^3 und behandelte ihn mit Essigsäure. Den entstandenen Niederschlag sammelte ich auf einem Filter und löste ihn, nach dem Auswaschen desselben mit essigsaurem Wasser, in schwach alkalischem (Soda enthaltendem) Wasser auf und schlug ihn abermals mit Essigsäure nieder; endlich kochte ich den so gereinigten Niederschlag mit 2 %iger Salzsäure 8 Stunden auf dem Wasserbade, wodurch die Flüssigkeit gelblichbraun wurde und die FEHLINGsche Lösung stark reduzierte. Das Resultat dieses Versuches spricht also dafür, daß die Speicheldrüse wirklich Mucin enthält. Dieses Mucin stimmt in vieler Hinsicht mit dem Mucin der submaxillaren Speicheldrüse überein und unterscheidet sich sowohl von dem Sehnenmucin, als auch von dem von HAMMARSTEN nachgewiesenen Helicomucin. Der mit Essigsäure erhaltene, mit Alkohol und Äther sulf. gereinigte Mucinniederschlag ist nämlich in 0,001—0,002 %iger Salzsäure löslich; aus einer Kochsalz enthaltenden Lösung wird es durch Gerbsäure sofort niedergeschlagen, durch Essigsäure oder Ferrocyankalium wird jedoch die Lösung nicht einmal getrübt. Außerdem ist für dieselbe noch charakteristisch, daß sie von verdünnten Alkalien (so schon von Kalkwasser) leicht zersetzt wird.

Auf den großen Glycogengehalt der Speicheldrüsen der Schnecken wurde auch BARFURTH schon aufmerksam. LANGE fand in der Speicheldrüse (wasserfrei) der *Arion empiricorum* FÉR. genannten nackten Schnecke 7,356 % Glycogen. In bezug auf die Weinbergschnecke fehlen solche quantitative Untersuchungen, obwohl die Kenntnis der Menge des Glycogens wichtig ist, weil die Frage, ob das Glycogen in den Speicheldrüsen im Laufe der Sekretion nur als Nebenprodukt auftritt oder ob es eine solche Rolle besitzt wie in der Leber, nur durch sie beantwortet werden kann. Da mir eine größere Menge von Schnecken zur Verfügung stand,

versuchte ich die quantitative Bestimmung des Glycogens. Zur Bestimmung des Glycogens benutzte ich die Methode von BRÜCKE-KÜLZ und nicht die heute viel gebräuchlichere und bis zu einem gewissen Grade einen größeren Prozentgehalt an Glycogen zeigende PFLÜGER-NERKINGsche Methode, weil auch BARFURTH und LANGE die Glycogenmenge mit der ersten Methode bestimmt haben und so die Vergleichung viel genauer ist. — Zu diesem Behufe brachte ich die präparierten und mehrmals in dest. Wasser ausgewaschenen Speicheldrüsen von hundert Schnecken zum Gefrieren, zerrieb sie nach sechsstündigem Gefrieren schnell zu einem Brei; den Brei behandelte ich mit 96 %igem Alkohol und trocknete ihn nach der Verdunstung des Alkohols im Thermostat. Im frischen Zustande wogen die Speicheldrüsen 10,38 g, das Gewicht der Speicheldrüsen einer Schnecke betrug also durchschnittlich 0,1038 g, während die getrockneten Speicheldrüsen 1,9878 g Trockensubstanz zurückließen. Den eingetrockneten Speicheldrüsenbrei kochte ich mit 2 %iger Kalilauge, bis er sich ganz löste. Nach der Neutralisation tropfte ich zur Lösung abwechselnd Salzsäure von 1,114 spez. Gewicht und BRÜCKEsche Lösung (50 g Jodkalium + 500 g dest. Wasser + Quecksilberjodid bis zur Sättigung) zur Fällung des Eiweißes. Nach dem Filtrieren zerrieb ich den Niederschlag in Wasser, welches Salzsäure und BRÜCKEsche Lösung enthielt, um das eventuell mitgerissene Glycogen in Lösung zu bringen. Diese Lösung und Fällung des Eiweißes wiederholte ich noch zweimal. Die so gewonnenen vier Filtrate vereinigte ich und behandelte sie mit dem doppelten Volumen 99,8 %igen Alkohols; hierauf löste ich den Niederschlag in wenig warmen Wasser und behandelte die Lösung wieder mit Alkohol, endlich wusch ich den ganzen Niederschlag mit Alkohol und Äther auf einem Filter. Hierauf trocknete ich den Niederschlag, der das ganze Glycogen der Speicheldrüsen enthielt, im Exsikkator und wog ihn. Sein Gewicht betrug 0,1024 g. Dies ist jedoch nicht das wirkliche Gewicht der Glycogenmenge, da sich zu derselben noch verschiedene anorganische Substanzen gesellen. Nach PFLÜGERS Untersuchungen* können wir nicht ein-

* Die Bestimmung d. Glycogenes nach BRÜCKE und KÜLZ; PFLÜGERS Archiv f. d. ges. Physiologie. LXXV., p. 120—247.

mal nach Bestimmung und Abzug der Aschenbestandteile das genaue Gewicht des Glycogens erfahren, sondern wir müssen erst bestimmen, wieviel Zucker aus dem Glycogen entsteht und nur aus der Zuckermenge können wir genau die Glycogenmenge feststellen. Um das Glycogen in Zucker zu verwandeln, löste ich das verunreinigte Glycogen in 100 cm^3 2 %iger Salzsäure und erwärmte die Lösung 4 Stunden auf dem Wasserbade; den entstandenen Zucker bestimmte ich durch Titration mit FEHLINGscher Lösung. Den $Cu(OH)_2$-Gehalt von 10 cm^3 FEHLINGscher Lösung reduzierten 46,29 cm^3 Zuckerlösung vollständig, und daher betrug die gesamte Traubenzuckermenge 0,108 g, da die Zuckerlösung 100 cm^3 betrug und da zur vollständigen Reduktion von 1 cm^3 FEHLINGscher Lösung 0,005 g Traubenzucker erforderlich ist. Hieraus erhalten wir die entsprechende Glycogenmenge durch Multiplikation mit dem Index 0,927; der tatsächliche Glycogengehalt beträgt 0,1001 g oder 5,03 % der Trockensubstanz der Speicheldrüsen. Nach BARFURTHS Untersuchungen* enthält die Leber der genießbaren Schnecke 5,76 %, der Fuß 3,29 %, die übrigen Organe 2,06 % Glycogen. Wir sehen aber, daß der Glycogengehalt der Speicheldrüsen dem der Leber sehr nahe kommt und den durchschnittlichen Glycogengehalt des Körpers weit übertrifft, weshalb die Speicheldrüse auch als glycogenbildendes und glycogenaufspeicherndes Organ im Stoffwechsel der Schnecke eine sehr wichtige Rolle spielen kann.

Die erhaltene Glycogenmenge ist natürlich nur annähernd bestimmt, da die Bildung und Aufspeicherung des Glycogens von vielen verschiedenen Faktoren abhängig ist, so von der Nahrung, von der Jahreszeit, vom Wetter und vielen andern Faktoren. Aber schon aus dieser einen Bestimmung können wir physiologisch wichtige Folgerungen ziehen und zwar in erster Reihe die, daß sich die Speicheldrüsen außer der Absonderung des Speichels auch noch am Kohlehydrat-Stoffwechsel beteiligen. Meine Ansicht wird noch dadurch bestärkt, daß LANGE in den Speicheldrüsen der *Arion empiricorum* FÉR. genannten Schnecke 7,356 % Gly-

* Archiv f. mikr. Anatomie, XXV., 1885, p. 343.

cogen fand. Obwohl ich bemerken muß, daß LANGES Angaben jedenfalls zu groß sind, da er das Glycogen aus der Aschenbestimmung durch Wägung bestimmte und das Mucin mit Essigsäure nicht entfernte, wodurch auch das von diesem sich abspaltende Kohlehydrat die Menge des Glycogens vergrößerte.

Die verdünnte Lösung des sich in den Speicheldrüsen aufspeichernden Glycogens zeigt, ähnlich dem in der Leber der Wirbeltiere vorkommenden, die bekannte Jodreaktion kaum oder überhaupt nicht, stimmt jedoch in vielen andern Eigenschaften mit dem typischen Glycogen vollkommen überein. So entsteht nach Jodzusatz bei Behandlung mit Jodkalium kein Niederschlag, sondern eine braune Lösung und nach Sättigung mit Chlorkalium nur nach viel Jodjodkalium-Lösung ein Niederschlag. 20%ige Gerbsäurelösung und Barytwasser fällt es flockig; der Niederschlag verschwindet jedoch nach dem Erwärmen. Nach Versetzen der Lösung mit dem doppelten Volumen MEYERscher Jodjodkaliumlösung (100 cm^3 der MEYERschen Lösung enthalten 0,5 g Jodkalium und 1 g Jod) und nachheriger Sättigung mit Chlorkalium erhält man reichlichen, rötlichbraunen Niederschlag.

Die Frage, inwiefern das Untersuchungsresultat KRUKENBERGS und LANGES (laut welchem das Sekret der Speicheldrüsen keine Verdauungssäfte enthält und daß daher, infolge seines Mucingehaltes nur seine mechanische Wirkung in Frage kommen kann) der Wirklichkeit entspricht, möchte ich mit der Mitteilung meiner weiteren Versuche beantworten.

Die Beschreibung meiner Versuche beginne ich mit der Mitteilung der Methoden.

Die Schnecken ertränkte ich ausnahmslos in ausgekochtem Wasser. Diese Methode hat nur den einen Nachteil, daß die Schnecken durch den Mund sehr viel Wasser aufnehmen und daß man daher bei der Präparierung der Speicheldrüsen sehr vorsichtig vorgehen muß, um den schwellenden Magen nicht zu verletzen und um die Speicheldrüsen mit dem aus dem Magen ausfließenden Safte nicht zu verunreinigen. Die Tötung mit 1%iger Cocainlösung, mit Chloroform und Curare benützte ich nicht, damit die Reaktion dieser Stoffe die weitere Untersuchung nicht störe. Die präparierten Speicheldrüsen wusch ich 3—4mal in

dest. Wasser und zerrieb sie, nachdem sie gefroren waren, mit Quarzsand zu einem Brei. Die Reaktion des Breies war verschieden, meistens aber neutral, seltener ausgesprochen alkalisch oder sauer, rötete jedoch im ersteren Falle nie eine 1 %ige Phenolphtaleïnlösung, im letzteren Falle bläute er Kongopapier nie. An der Luft stehend, wird er stark sauer und bekommt einen schlechten Geruch. Diese sauere Reaktion stammt wahrscheinlich von freier Milchsäure, da sie eine mit Eisenchlorid violett gefärbte, wässrige Phenollösung entfärbt (UFFELMANNsche Probe). Die Milchsäure stammt wahrscheinlich vom Glycogen, da beim Vorhandensein antiseptischer Mittel die Milchsäurebildung wegbleibt.

Um die Bakterienwirkung vollkommen auszuschließen, gab ich zum mit wenig dest. Wasser verdünnten Speicheldrüsenbrei Fluornatrium in 1—1,5 %iger Konzentration und sättigte das Ganze mit Toluol (beiläufig 3 %). Das Fluornatrium greift zwar nach längerem Stehen die empfindlicheren Enzyme an, schließt jedoch nach TAPPEINERS*, sowie ARTHUS und HUBERS** Untersuchungen die Wirkung der Bakterien vollständig aus und stört auch die verschiedenen Reaktionen nicht in der Weise, wie die bisher allgemein gebräuchlichen antiseptischen Mittel (Salicylsäure, Thymol, Chloroform etc.). Beim gemeinsamen Gebrauch von Toluol und Fluornatrium behalten die gewöhnlicheren Enzyme jahrelang ihre Wirkung; so besitze ich z. B. mehrere aus Käferdärmen stammende Enzymlösungen, die auch nach zweijährigem Stehen die Kohlehydrate und Eiweißstoffe ebenso wirksam verdauen, wie im frischen Zustand.

1. Versuch.

Zum vorher erwähnten filtrierten Speicheldrüsenextrakt gab ich 1 %ige Stärkelösung und stellte das Reagenzglas in den auf 30° C. erwärmten Thermostat. Zur Kontrolle gab ich in ein anderes Reagenzglas ebensoviel 1 %ige Stärkelösung und anstatt des Speicheldrüsenextraktes 1 %iges, Toluol enthaltendes, Fluor-

* Archiv f. exp. Pathologie u. Pharmakologie, XXVII., 1890, p. 108.
** Archives de physiol. norm. et pathol., 5. Sér., IV., 1892, p. 651.

natrium. Nach 24 Stunden gab der Inhalt des ersten Reagenzglases mit Jodtinktur eine gelbe Reaktion zum Zeichen dessen, daß in ihm die Stärke bereits umgeändert ist; nach Entfernung der Eiweißstoffe und nach Niederschlagen des Mucins mit Essigsäure reduziert er jedoch weder die FEHLINGsche, noch die alkalische 0,001 %ige Safraninlösung (CRISMERsche Lösung), das heißt, sie enthält keinen Traubenzucker. Die Jodreaktion des Inhaltes des zweiten und dritten Reagenzglases ist unverändert schön blau, die Zuckerreaktionen (TROMMER-, CRISMER-, BOETTGER-ALMÉN- und JOHNSONsche Proben) sind aber ausgesprochen negativ.

2. Versuch.

Einige Tropfen Speicheldrüsenextrakt gab ich in die Höhlung eines ausgehöhlten Objektträgers und deckte ihn nach Zusatz von Erdäpfelstärkekörnern mit einem Deckgläschen zu. Zur Kontrole gab ich in die Höhlung eines andern Objektträgers gekochtes Speicheldrüsenextrakt und gleichfalls Erdäpfelstärkekörner, in die Höhlung eines dritten endlich Erdäpfelstärkekörner und 1 %iges, Toluol enthaltendes Fluornatrium. Alle drei Objektträger gab ich in eine SCHULTZEsche nasse Kammer, welche ich in den auf 30° C. eingestellten Thermostat stellte. Nach 24 Stunden konnte ich mich mit dem Mikroskop deutlich überzeugen, daß am ersten Objektträger kaum einige Stärkekörner geblieben sind und daß auch die wenigen, noch vorhandenen ganz zerfallen waren, während am zweiten und dritten die Stärkekörner vollkommen unversehrt waren.

3. Versuch.

In einem Reagenzglase gab ich zum Speicheldrüsenextrakt 1 %ige Amyloselösung, zur Kontrolle in ein zweites Reagenzglas aufgekochtes Speicheldrüsenextrakt und 1 % Amyloselöung, in ein drittes 1 %ige Amyloselösung und 1 %iges, Toluol enthaltendes Fluornatrium. Die drei Reagenzgläser stellte ich in den auf 32° C. eingestellten Thermostat. Nach 24 Stunden war im ersten Reagenzglas die Jodreaktion der Stärke, sowie die Zuckerreaktionen (TROMMER-, BARFOED-, CRISMER- u. JOHNSONsche Proben) negativ, während im zweiten und dritten Reagenzglas die Jodreaktion der

Stärke positiv (berlinerblau) war, die Zuckerproben jedoch ebenfalls negativ. Amylose oder in Wasser lösliche Stärke (= DELFF-sches Amylogen) stellte ich in der Weise her, daß ich gewöhnliche Reisstärke durch anhaltendes Kochen in Glycerin löste und mit Alkohol niederschlug.

4. Versuch.

In ein Reagenzglas gab ich zu Speicheldrüsenextrakt 0,5 % Glycogenlösung, zur Kontrolle in ein anderes Reagenzglas gekochtes Speicheldrüsenextrakt und 0,5 %ige Glycogenlösung, in ein drittes endlich 0,5 %ige Glycogenlösung und Toluol enthaltendes, 1 %iges Fluornatrium. Nach 24 Stunden war die Jodreaktion des Glycogens im ersten Reagenzglas negativ, die Zuckerproben (TROMMER-, BARFOED- und JOHNSONsche Proben) ebenfalls negativ, im zweiten und dritten Reagenzglas die Jodreaktion des Glycogenes unverändert positiv, die Zuckerproben negativ.

Das Resultat dieser vier Versuche spricht also entschieden dafür, daß das Speicheldrüsenextrakt ein Enzym enthält, welches die Stärke und das Glycogen, d. h. die Polysaccharide verzuckern kann.

Daß die Stärke und das Glycogen nach 24stündiger Wirkung des Speicheldrüsenextraktes tatsächlich vollständig verwandelt wird, bezeugt folgender Versuch. Ich bin aus der Überlegung ausgegangen, daß, wenn nach 24 Stunden im Reagenzglas, dessen Inhalt weder die Stärke- und Glycogen-, noch die Traubenzuckerproben zeigt, irgendein Polysaccharid vorhanden ist, so verwandelt dieses die Diastase in Zucker. Ich kochte also den Inhalt des Reagenzglases auf und gab nach Auskühlen desselben Diastase hinzu. Nach 12 Stunden waren die Zuckerproben negativ, d. h. die Stärke und das Glycogen verloren nicht nur ihre charakteristischen Jodreaktionen, sondern sogar ihre Polysaccharidennatur. Hier taucht nun die Frage auf, in was wurden die Stärke und das Glycogen nach Verlust ihrer Polysaccharidennatur durch die Wirkung des Enzymes der Speicheldrüse verwandelt?

Auch diese Frage können wir auf Grund folgenden Versuches beantworten. Wenn man in einem Reagenzglase filtriertes Speichel-

drüsenextrakt und 0,01 %ige Stärkelösung mischt, diese in einen auf 32° C. erwärmten Thermostat stellt und in Intervallen von 10 Minuten auf Stärke und Traubenzucker prüft, so stellt sich heraus, daß schon nach einer Stunde die Jodreaktion nicht mehr blau ist, sondern rötlich-violett, was schon für das Vorhandensein von Erythrodextrin spricht. Entfernt man nach drei bis vier Stunden die Versuchsflüssigkeit vom Eiweiß und schlägt man das Mucin mittelst Essigsäure nieder, so kann man die TROMMER-, CRISMER-, BARFOED- und JOHNSONschen Zuckerproben mit positivem Resultat ausführen. Diese Proben beweisen das Vorhandensein von Traubenzucker. Um mich zu überzeugen, ob nur Traubenzucker oder auch Maltose entsteht, wandte ich die Phenylhydrazinprobe an. Bei der mikroskopischen Untersuchung des bei dieser Probe entstehenden kristallinischen Niederschlages konnte ich neben den charakteristischen nadelförmigen Phenylglykosazonkristallen das Vorhandensein der platten Maltosazonkriställchen leicht feststellen. Mit Glycogen erhielt ich ganz ähnliche Resultate. Durch die Wirkung des Enzyms der Speicheldrüse entsteht also aus Stärke und Glycogen Erythrodextrin, weiter Maltose und Traubenzucker.

Aus meinen Versuchen geht hervor, daß das Speicheldrüsenextrakt der Schnecke die 0,01 %ige Stärke- oder Glycogenlösung in ca. 3½ Stunden vollkommen verändert, sodaß man mit Jod weder Stärke noch Glycogen nachweisen kann. Nach 3½ Stunden geben jedoch die BARFOED-, TROMMER-, CRISMER- und JOHNSONschen Zuckerproben ebenfalls ein negatives Resultat, das heißt nach 3½ Stunden kann nicht nur die Stärke oder das Glycogen nicht nachgewiesen werden, sondern nicht einmal die aus ihnen entstandene Maltose und der Traubenzucker, da sie zweifelsohne verwandelt sind! Durch diesen Umstand entsteht wieder eine neue Frage. Wie geht die Umwandlung vor sich und was für eine Substanz entsteht hierbei?

HUDSON FORD* wies schon im Jahre 1859 nach, daß das Destillat des Blutes Alkohol enthält. Nach ihm fand BÉCHAMP**

* Journal of the Elliott Society of Nat. Hist., I. Art. II., 1861, p. 43—99. Zitiert nach LANDSBERG.

** Comptes rendus de l'Académie des sciences, LXXV., 1872, p. 1830.

1872 im Destillat der Leber, der Kuh- und Eselinmilch Alkohol. Nach RAJEWSZKY* bildet der Alkohol einen normalen Bestandteil der Organe. Neuerdings wies STOKLASA** nach, daß nicht nur bei der anaëroben Atmung der Pflanzen Alkohol und Kohlendioxyd entsteht, sondern auch in fast allen Organen der Wirbeltiere, wenn diese zu keiner Luft, bzw. zu keinem Oxygen gelangen. BACH und BATELLI*** geben auf Grund dieser Tatsachen und ihrer eigenen Erfahrungen dem Gedanken Ausdruck, daß der Alkohol ein normales Dissimilationsprodukt der Kohlehydrate ist. KOBERT† wies im Ei der *Testudo graeca*, in den Eiern des *Sipunculus* und der *Arabacia*, weiter im Blute von *Sipunculus*, *Ascaris lumbricoides*, sowie im Körper des Regenwurmes und der Ameisenlarve das Vorkommen eines eigentümlichen Enzyms („tierische Zymase") nach, das aus verschiedenen Kohlehydraten und Glycosiden Alkohol bereitet. LANDSBERG†† kam auf Grund genauer, chemisch unanfechtbarer Untersuchungen ebenfalls zu dem Resultat, daß die frischen tierischen Organe eine kleine Menge präformierten Alkohols enthalten. Auf Grund dieser Untersuchungen kam mir der Gedanke, ob der Speicheldrüsenextrakt der Schnecke aus dem aus den Polysacchariden entstehenden Zucker nicht ebenfalls Alkohol bereitet. Um mich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit meines Gedankens zu überzeugen, stellte ich folgende Versuche an.

Sorgfältig präparierte und in destilliertem Wasser mehrfach gewaschene Speicheldrüsen brachte ich zum Gefrieren und zermalmte sie mit chemisch reinem Quarzsand zu einem Brei. Den Brei verdünnte ich mit dem doppelten Volumen 1 %igem Fluornatrium und sättigte ihn mit Toluol. Den so vorbereiteten Speicheldrüsenextrakt filtrierte ich und teilte ihn in drei Portionen. Zur ersten Portion gab ich 1 %ige Stärkelösung, zur zweiten nach Aufkochen und Auskühlen ebenfalls 1 %ige Stärkelösung, zur dritten aber statt der 1 %igen Stärkelösung ein gleiches Volumen

* PFLÜGERS Archiv f. d. ges. Physiologie, XI., 1875, p. 122—128.
** Deutsche mediz. Wochenschrift, 1904 (6), p. 198.
*** Comptes rendus de l'Académie des sciences, CXXXVI., 1903, p. 1351.
† PFLÜGERS Archiv f. d. ges. Physiologie, XCIX., 1903, p. 176—186.
†† Zeitschrift f. physiologische Chemie, XLI., 1904, p. 505—523.

1 %iges mit Toluol gesättiges Fluornatrium. Alle aber, die Versuchsflüssigkeiten enthaltenden Reagenzgläser stellte ich in den 32grädigen Thermostat. Nach 48 Stunden gab ich zum Inhalte von ca. 10 cm³ des ersten Reagenzglases, das weder die Stärke-, noch die Zuckerreaktionen zeigte, um den eventuell entstehenden Alkohol zu Aldehyd zu oxydieren 0,5 cm³ conc. H_2SO_4 und gleichfalls 0,5 cm³ 2 %ige K_2CrO_4-Lösung und destillierte. Vom Destillat fing ich ca. 1 cm³ auf und stellte damit die Aldehydreaktionen an; vorerst die Jodoformprobe, dann die Fuchsin- und die ammoniakalische Silberreaktion. Das Resultat war in allen drei Fällen positiv, das heißt bei der Jodoformprobe konnte man neben dem Jodoformgeruch mit dem Mikroskope die charakteristischen sechseckigen Jodoformkristalle wahrnehmen; bei der Fuchsinprobe wurde die vorher mit Schwefelsäure entfärbte Fuchsinlösung schön rot, während bei der ammoniakalischen Silberprobe ein Silberspiegel entstand. Mit der Versuchsflüssigkeit des zweiten und dritten Reagenzglases verfuhr ich ganz in der beschriebenen Weise und fand die Stärke- und Zuckerproben negativ, die Fuchsin- und Jodoformprobe des Destillats ebenfalls negativ, während bei der ammoniakalischen Silberprobe kein Silberspiegel, sondern ein kaum wahrnehmbarer Niederschlag entstand. Ich bemerke, daß ich zur Jodoformprobe, da die im Handel käufliche Natronlauge mit Alkohol gereinigt wird, durch Verbrennung von metallinischem Natrium bereitete Natronlauge und chemisch ganz reines kristallisiertes Jod und Jodkalium verwandte.

Ganz ähnliche Versuche machte ich mit Glycogen. In einem Reagenzglase mischte ich Speicheldrüsenextrakt und 0,5 %ige Glycogenlösung, in einem zweiten aufgekochtes Speicheldrüsenextrakt und 5 %ige Glycogenlösung, in einem dritten endlich 0,5 %iges Glycogen und 1 %ige mit Toluol gesättigte Fluornatriumlösung. Den Inhalt der drei Reagenzgläser behandelte ich nach 48stündigem Stehen mit H_2SO_4 und K_2CrO_4 und destillierte. Die Aldehydreaktionen (Jodoform und Fuchsinproben) des aus dem ersten Reagenzglase stammenden Destillats waren positiv, während die aus dem zweiten und dritten Reagenzglase stammenden Destillate negative Aldehydproben zeigten. In allen meinen Versuchen oxydierte ich den Alkohol und wies ihn als Aldehyd nach,

weshalb man einwenden könnte, daß das Resultat für das Vorhandensein von Aldehyd und nicht von Alkohol spricht. Dieser Einwand hätte jedoch keinen realen Grund, weil erstens in den Speicheldrüsen präformierte Aldehyde nur in Spuren vorkommen, und auch diese werden von der H_2SO_4 und vom K_2CrO_4 zweifelsohne oxydiert und können daher als Aldehyde nicht nachgewiesen werden, wir können also mit ganzer Bestimmtheit und mit Recht darauf schließen, daß die nachgewiesenen Aldehyde durch die oxydierende Wirkung des Kaliumchromats erst nachträglich aus dem Alkohol entstanden sind.

Um die alkoholbildende Wirkung des Speicheldrüsenextraktes der Schnecke nachzuweisen, stellte ich noch folgende Versuche an:

1. Versuch.

Zu Speicheldrüsenextrakt gab ich 1 %ige Stärkelösung und zur Kontrolle in ein zweites Reagenzglas zu aufgekochtem Speicheldrüsenextrakt 1 %ige Stärkelösung und endlich in ein drittes Reagenzglas zu 1 %iger Stärke 1 %iges mit Toluol gesättigtes Fluornatrium.

2. Versuch.

In einem Reagenzglas schüttelte ich Speicheldrüsenextrakt mit 1 %iger Traubenzuckerlösung, zur Kontrolle mischte ich in einem zweiten gekochtes Speicheldrüsenextrakt mit 1 %iger Traubenzuckerlösung, in einem dritten endlich 1%ige Traubenzuckerlösung mit 1 %igem mit Toluol gesättigtem Fluornatrium.

3. Versuch.

Zu Speicheldrüsenextrakt gab ich 1 %ige Maltoselösung.

4. Versuch.

Speicheldrüsenextrakt mischte ich mit 1 %iger Dextrinlösung. Das zum Versuche verwandte Merckscche Dextrin (Dextr. puriss. alkohol. praecipitat.) enthielt besonders viel Erythrodextrin und Amyloporphyrin*, weshalb die Jodreaktion auffallend lebhaft rot war.

* Vergl. Bütschli, Untersuch. üb. Amylose und amyloseartige Körper; Verhandl. d. Heidelberg. naturhist.-med. Vereins, N. F., VII., p. 470.

Als Antisepticum verwandte ich in allen vier Versuchen Fluornatrium und Toluol, den Versuch selbst führte ich im auf 32° C. erwärmten Thermostat aus. Nach 48 Stunden war die Stärke und Zuckerprobe (TROMMER) des Inhaltes des ersten Reagenzglases im ersten Versuch negativ, die CHAUTARDsche Acetonprobe ebenfalls negativ, während die Jodoform-, Chromat- und Essigätherprobe ein positives Resultat lieferte, d. h. aus der Stärke hatte sich Aethylalkohol gebildet.

Um mich davon zu überzeugen, ob das positive Resultat der Jodoform-, Chromat- und Essigätherproben nicht von Ameisensäure herrührt, isolierte ich letztere vom Alkohol und zwar so, daß ich die Ameisensäure in ein Bleisalz umwandelte und nochmals destillierte. Die Jodoform-, Chromat- und Essigätherproben dieses Destillates waren auch positiv. Im zweiten und dritten Reagenzglase blieb die Jodprobe der Stärke positiv, während die Alkoholproben (Jodoform-, Chromat- und Essigätherproben) des Destillates ein negatives Resultat lieferten.

Im ersten Falle des zweiten Versuches waren nach 48 Stunden die BARFOEDsche und TROMMERsche Zuckerprobe positiv, aber die Alkoholproben (Jodoform, Chromatproben) des Destillates ebenfalls positiv. Im zweiten und dritten Falle waren die Traubenzuckerproben unverändert positiv, die Alkohol- und Aldehydproben ihrer Destillate jedoch negativ. Der Speicheldrüsenextrakt kann also auch aus Traubenzucker Aethylalkohol bereiten.

Im dritten Versuch war nach 48 Stunden die BARFOEDsche Probe negativ; die TROMMER-Probe positiv, die Alkoholproben des Destillates negativ, das heißt der Speicheldrüsenextrakt übt auf die Maltose keine Wirkung aus und kann dieselbe weder in Traubenzucker, noch in Alkohol spalten. Diesen Versuch stützte ich auf die Eigenschaft der Maltose, daß dieselbe die BARFOEDsche Lösung (essigsaures Kupferacetat) nicht reduziert.

Im vierten Versuch war nach 12 Stunden die Jodreaktion negativ, die TROMMERsche Zuckerprobe positiv. Nach 48 Stunden erwies sich die TROMMER-Probe schon als negativ, während die Alkoholproben des Destillates ein positives Resultat lieferten.

Dieser Versuch spricht dafür, daß der Speicheldrüsenextrakt aus Dextrin Traubenzucker und Alkohol bildet.

Meine Versuche bestätigen also, daß das Extrakt der Speicheldrüsen der Schnecken im 32grädigen Thermostat aus Stärke, aus Glycogen, aus Dextrin und aus Traubenzucker Alkohol hervorbringen kann. Die Frage, ob die Spaltung der Kohlehydrate schon durch die Wirkung des Speicheldrüsensekretes nicht nur in vitro, sondern auch im Leben, bis zum Aethylalkohol reicht, können wir natürlich nicht beantworten. Nach meiner Ansicht ist dies wahrscheinlich nicht der Fall, denn die aus den Polysacchariden gebildete Maltose und der Traubenzucker werden schnell resorbiert, und so kann aus ihnen nicht Alkohol gebildet werden. Meine Versuche bestätigen jedoch zwei Tatsachen: erstens, daß in den Speicheldrüsen der Schnecke aus Kohlehydraten auf Wirkung eines durch Kochen unwirksam werdenden Enzymes Aethylalkohol entsteht und zweitens, daß der Alkohol als Dissimilationsprodukt der Kohlehydrate bei den wirbellosen Tieren wahrscheinlich viel häufiger ist, als man bisher dachte.

Die obigen Versuche können uns davon überzeugen, daß in der Speicheldrüse der Schnecke ein amylolytisches und ein glycolytisches Enzym vorhanden ist, das die Forscher bisher darum nicht beobachteten, weil sie das gewohnte Endprodukt der amylolytischen und glycolytischen Vorgänge, den Traubenzucker, nach 24 Stunden nicht nachweisen konnten. Viele Forscher halten zwar das amylolytische und glycolytische Enzym für identisch, obwohl man auf Grund der Untersuchungen Fischers* wenigstens bei den wirbellosen Tieren die zwei Enzyme unterscheiden muß. Auf Grund meiner Untersuchungen kann auch ich die Ansicht Koberts** bestärken, daß das amylolytische Enzym vom glycolytischen verschieden ist, und daß letzteres die Stärke nicht unbedingt in Zucker verwandelt. Einige Speicheldrüsen konservierte ich in 4%igem Formol und zerrieb sie dann nach gründlichem Auswaschen und Gefrierenlassen zu einem Brei.

* Werner Fischer, Über die Enzyme wirbelloser Tiere. Dissertation, Rostock, 1903.

** Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie. XCIX., 1903, p. 141.

Der mit 1 %igem, mit Toluol gesättigtem Fluornatrium bereitete Extrakt des Breies war in bezug auf Stärke vollkommen wirkungslos, verwandelte jedoch das Glycogen binnen kurzer Zeit in Traubenzucker.

Die amylolytischen und glycolytischen Enzyme der Speicheldrüse der Schnecke sind gegen Säuren sehr empfindlich. Schon ein Tropfen Salzsäure hemmt vollkommen ihre Wirkung, während die Alkalien, wie z. B. die Soda ihre Verdauungswirkung steigern. Durch Milch- und Zitronensäure auch in 0,001 %iger Konzentration wird ihre Wirkung aufgehoben. Mit durch Sodazusatz schwach alkalisch gemachtem, 1 %igem Fluornatrium kann man ein sehr energisch verdauendes Speicheldrüsenextrakt bereiten, das sogar in verhältnismäßig sehr großer Verdünnung die Stärke und das Glycogen in Zucker verwandelt, das heißt man kann die Wirkung der amylolytischen und glycolytischen Enzyme der Speicheldrüsen der Schnecke auf dieselbe Weise steigern, wie dies von Apáthy* für die aus den Speicheldrüsen der medizinischen Blutegel extrahierbaren und die Blutgerinnung hindernden Enzyme nachgewiesen hat.

Die Speicheldrüse der Schnecke enthält außer den amylolytischen und glycolytischen auch noch andere Enzyme.

Versetzt man Speicheldrüsenextrakt mit 1 %iger Rohrzuckerlösung und entfernt man das Eiweiß mit Essigsäure, so geben nach 24 Stunden die Traubenzuckerproben (Barfoed- und Trommerschen) ein positives Resultat. Die Phenylhydrazinprobe zeigt unter dem Mikroskope charakteristische Phenylglykosazonkristalle. Die Speicheldrüse der Schnecke enthält also auch Invertin, durch dessen Wirkung aus Rohrzucker Traubenzucker entsteht.

In bezug auf Maltose und Milchzucker ist das Speicheldrüsenextrakt der Schnecke vollkommen wirkungslos. Speicheldrüsenextrakt + 1 %ige Maltose und Speicheldrüsenextrakt + 1 %ige Laktose geben nicht einmal nach achttägigem Stehen eine positive Barfoedsche Probe, während die Mischung die Fehling-

* Értesitö az Erdélyi Múzeum-Egylet orvos-természettud. szakosztályából; XXII., 1897, Revue I., p. 74—75. (Mitteilungen der med.-naturwiss. Sektion des Siebenbürgischen Museum-Vereins.)

sche Lösung stark reduziert, das heißt die Speicheldrüse der Schnecke enthält weder Maltase noch Laktase.

Biedermann und Moritz* fanden in der Verdauungsdrüse des Mitteldarmes der Schnecken, in der sogenannten Leber ein energisch wirkendes, Cellulose lösendes Ferment, Cytase. Ich untersuchte deshalb, ob dieses Enzym auch in der Speicheldrüse vorhanden ist. Ich führte Verdauungsversuche mit Watte, Papierschnitzelchen, mit aus dem Endospermiumgewebe von Dattelkernen verfertigten feinen Schnitten aus, weiter mit der nach Hofmeisters** Vorschriften hergestellten „löslichen Cellulose"; das Resultat war jedoch immer ein negatives, das heißt die Cellulose löste sich nicht. Die Speicheldrüse der Schnecke enthält also keine Cytase.

Aus der Reihe der Glycosiden untersuchte ich die Verdauung des Amygdalins, Arbutins und Phloridzins. Speicheldrüsenextrakt versetzte ich mit 1%iger wässriger Amygdalinlösung und gab zum ganzen Fluornatrium in 1%iger Konzentration und bis zu 3% Toluol. Nach 24 Stunden war der Geruch der Blausäure gut wahrnehmbar und nach Entfernung der Eiweißstoffe konnte man in der zum Versuche dienenden Lösung mit der Trommerschen Probe Traubenzucker nachweisen. Das Amygdalin wurde also durch die Wirkung des Speicheldrüsenextraktes in Blausäure und Traubenzucker gespalten. Dieses Resultat ist umso bemerkenswerter, da nach Grisson*** der Speichel, das Pepsin, die Galle und der Darmsaft der höheren Tiere in Abwesenheit von Mikroorganismen das Amygdalin nicht zersetzen kann.

Einen ähnlichen Versuch stellte ich mit 1%iger wässriger Arbutinlösung an. Nach 24 Stunden färbte sich die Mischung des Speicheldrüsenextraktes und des Arbutins mit Eisenchlorid nicht blau, nach Entfernung des Eiweißes mit Essigsäure konnte ich mit der Trommerschen Probe keinen Traubenzucker nachweisen. Zu den Verdauungsversuchen mit Phloridzin verwandte ich eine 1%ige wässrige Phloridzinlösung, die sich mit Eisen-

* Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie, LXXIII., 1898, p. 219—287.

** Landw. Jahrb., XVII., 1888, p. 239.

*** Über das Verhalten der Glycoside im Tierkörper. Dissertation, Rostock, 1887.

chlorid bräunlich-rot färbte. Nach 24stündigem Stehen färbte sich jedoch der Speicheldrüsenextrakt und die 1 %ige Phloridzinlösung mit Eisenchlorid unverändert bräunlich-rot und nach Entfernung des Mucins und des Eiweißes waren die TROMMERsche und BARFOEDsche Zuckerproben negativ. Ich bemerke, daß ich sowohl bei den Versuchen mit Amygdalin, als auch bei denen mit Arbutin und Phloridzin — zur Kontrolle — auch mit aufgekochtem Speicheldrüsenextrakt experimentierte, und zwar mit negativem Resultat, das heißt in den Kontrollversuchen erlitt das Amygdalin, Arbutin und Phoridzin keine Veränderung.* Die Enzyme der Speicheldrüse wirken also von den Glycosiden wahrscheinlich auf das Amygdalin und Arbutin, während sie auf das Phloridzin keine Wirkung ausüben.

Nach SCHÖNBEIN** besitzen alle Fermente die Grundeigenschaft, daß sie Hydrogenperoxyd auf die Art des kolloidalen Platins zersetzen können; JACOBSON*** und KOBERT† wiesen jedoch auf Grund ihrer Untersuchungen darauf hin, daß die Enzymwirkung und die Zersetzung des Hydrogenperoxydes zwei verschiedene Eigenschaften sind.

So kann man z. B. nach den Untersuchungen von NEUMANN-WENDER†† die katalytische Wirkung der Diastase vernichten, ohne daß ihre amylolytische Eigenschaft eine Einbuße erlitte. In der Kenntnis dieser Umstände untersuchte ich, ob der Speicheldrüsenextrakt eine Hydrogenperoxyd katalysierende Wirkung hat. Zu diesem Behufe gab ich zum neutralisierten Speicheldrüsenextrakt auf Grund der Untersuchungen von FISCHER-KOBERT††† zehnfach verdünnte Lösung von 30 %igem, MERCKschem, chemisch reinem H_2O_2. Die Versuchsflüssigkeit begann alsbald fein zu schäumen, zum Zeichen dessen, daß das Speicheldrüsenextrakt eine Substanz enthält, die Hydrogenperoxyd katalysiert, das heißt das Extrakt enthält Katalase.

* Weitere Experimente sind noch in Vorbereitung.
** Journal f. prakt. Chemie, LXXV., 1858 u. LXXXIX., 1863.
*** Zeitschrift f. physiol. Chemie, XVI., 1892, p. 340.
† Medicinische Woche, Jahrg. 1901, No. 25—27.
†† Pharmac. Zeitung, Jahrg. 1903, No. 55, p. 471.
††† PFLÜGERS Archiv f. d. ges. Physiologie, XCIX., 1903, p. 125.

Seit GIARD* im Jahre 1896 feststellte, daß die Gewebe gewisser Ascidien die Guajaktinktur bläuen, wiesen die Forscher in den verschiedenen Geweben der wirbellosen Tiere eine ganze Reihe oxydativer Enzyme, sog. Oxydasen nach. Von diesen ist die von FÜRTH und SCHNEIDER** studierte Tyrosinase die bekannteste, die das im Körper befindliche Tyrosin in Melanin verwandelt. Die Speicheldrüsen der Schnecken enthalten wahrscheinlich kein solches oxydatives Enzym, da nach dem Gefrieren hergestelltes wäßriges Extrakt weder die Mischung von Terpentinöl und Guajaktinktur, selbst nach längerem Stehen, blaufärbt, noch die Guajakollösung rötet.

Die Untersuchung der Wirkung des Speichels der Schnecken auf Inulin, Eiweißstoffe und Fette konnte ich in Ermangelung günstigen Untersuchungsmaterials noch nicht beenden, weshalb ich die Mitteilung derselben auf eine andere Gelegenheit verschiebe.

Die Hauptresultate meiner Untersuchungen fasse ich zur leichteren Übersicht im Folgenden zusammen.

1. Der reine Speichel reagiert alkalisch und ist immer glycogenfrei.

2. Der Speichel enthält chemisch nachweisbares Mucin, welches mit dem Mucin der submaxillaren Speicheldrüse der Wirbeltiere in vieler Hinsicht übereinstimmt, jedoch sowohl vom Mucin der Sehnen, als auch von dem von HAMMARSTEN untersuchten Helicomucin abweicht.

3. Das in der Speicheldrüse der Schnecke aufgespeicherte Glycogen beträgt 5,03 % ihrer Trockensubstanz.

4. Nach der Leber (Verdauungsdrüse) ist die Speicheldrüse das größte und bedeutendste glycogenbildende und glycogenaufspeichernde Organ des Körpers, durch welche Eigenschaft sie im Stoffwechsel der Kohlehydrate eine sehr wichtige Rolle spielen kann.

5. Die Speicheldrüse erzeugt Enzyme durch deren Wirkung aus Stärke, Glycogen und Dextrin, das heißt aus Polysacchariden Erythrodextrin, Maltose und Traubenzucker entsteht.

6. Der durch Wirkung der von den Speicheldrüsen erzeugten

* Compt. rend. de la soc. biol., XLVIII., 1896, p. 483.

** HOFMEISTERS Beiträge z. chem. Physiol. u. Pathol., I., 1902, p. 229—242.

Enzyme aus den Polysacchariden entstehende Traubenzucker kann nur zu einer gewissen Zeit nachgewiesen werden, da später durch Wirkung der ebenfalls von der Speicheldrüse erzeugten Zymase aus dem Traubenzucker Aethylalkohol entsteht.

7. Die Speicheldrüse enthält ein besonderes Enzym, welches aus Stärke, Glycogen, Dextrin und Traubenzucker Aethylalkohol bilden kann.

8. Der durch die Wirkung der Enzyme der Speicheldrüse aus den Polysacchariden und Zuckern entstehende Aethylalkohol ist kein Verdauungs-, sondern vielmehr ein Dissimilationsprodukt.

9. Die die Stärke und das Glycogen verzuckernden Enzyme sind nicht identisch, da das amylolytische Enzym ganz vernichtet werden kann, ohne daß hierdurch die Verzuckerung des Glycogens eine Einbuße erlitte.

10. Die Wirkung der amylo- und glycolytischen Enzyme wird durch Säuren (Salzsäure, Milchsäure) vernichtet, von den Alkalien jedoch gesteigert.

11. Die Speicheldrüsen enthalten Invertin, welches den Rohrzucker in Traubenzucker verwandelt.

12. Das Sekret der Speicheldrüse übt auf Maltose, Milchzucker und Cellulose keinen Einfluß aus, das heißt es enthält weder Maltase noch Laktase oder Cytase.

13. Von den Glycosiden wirken die Enzyme der Speicheldrüse wahrscheinlich auf das Amygdalin und Arbutin, auf das Phloridzin sind sie aber gänzlich wirkungslos.

14. Die Speicheldrüse enthält Katalase, welches das H_2O_2 zersetzt, sie enthält jedoch keine Oxydase.

Am Ende meiner Arbeit erfülle ich eine angenehme Pflicht, indem ich meinem hochverehrten Professor und Prinzipal Herrn Dr. Géza Entz für die Aneiferung und die fachgemäßen Ratschläge, mit denen er meine Bemühungen unterstützte, Herrn Ludwig Winkler a.o. Univ.-Professor der Chemie für seine freundlichen Ratschläge auf dem Gebiete der Chemie und Herrn Univ.-Assistenten Oskar Keller für das mühevolle Sammeln des Untersuchungsmaterials meinen Dank ausspreche.

7.

ÜBER EIN KRITERIUM DER INTRANSITIVITÄT VON ENDLICHEN GRUPPEN LINEARER SUBSTITUTIONEN.

Von ALADÁR VISNYA in Nagy-Várad.

Übersetzt aus „Mathematikai és Physikai Lapok" (Mathematische und physikalische Blätter) Bd. XII (1903), p. 203– 217.

Eine Gruppe linearer Substitutionen wird nach MASCHKE* intransitiv genannt, wenn man sie so transformieren kann, daß alle ihre Substitutionen ähnlich zerlegbar werden. In dieser transformierten Form können wir auch die Gruppe kurz zerlegbar nennen. Diese zerlegbaren Gruppen sind auf den ersten Blick leicht zu erkennen an den vielen, nach gewisser Regel verteilten Stellen, die in den Matrices ihrer Substitutionen durchweg mit Nullen besetzt sind.

Unterwirft man diese zerlegbaren Gruppen beliebigen Transformationen, so gelangt man zu den intransitiven Gruppen. Es ist zwar möglich, daß hierbei noch immer einige Stellen durchgehends mit Nullen besetzt bleiben, im allgemeinen aber werden sämtliche Nullstellen verschwinden. Die intransitiven Gruppen besitzen also schon kein so augenfälliges Merkmal wie die zerlegbaren.

Es entsteht also die Frage, wie man die intransitiven Gruppen von den — man kann sagen — transitiven Gruppen der be-

* Beweis des Satzes, daß diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Koeffizienten auftreten, intransitiv sind. *Math. Ann.* Bd. 52, p. 363.

treffenden Dimension unterscheiden kann? Dies soll hier für die endlichen Gruppen erledigt werden. Für diese hat zwar MASCHKE in der eben zitierten Note eine hinreichende, aber bei weitem nicht notwendige Bedingung angegeben. Wie es bereits der Titel von MASCHKEs Abhandlung anzeigt, besteht diese Bedingung darin, daß in den Matrices sämtlicher Substitutionen wenigstens eine (nicht in die Hauptdiagonale fallende) Stelle durchgehends mit Nullen besetzt sei. Wir haben hingegen schon bemerkt, daß im allgemeinen die Nullen gänzlich verschwinden können. Bringt man aber diese MASCHKEschen Ausführungen in Verbindung mit den HERMITEschen Formen, die, wie bekannt, Invarianten zu jeder endlichen Gruppe linearer Substitutionen liefern, so kommt man leicht zu folgendem Satze, dessen Beweis das Hauptziel dieser Note ist:

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Intransitivität einer endlichen Gruppe linearer Substitutionen ist, daß eine semidefinite HERMITEsche Form

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i\bar{x}_k \qquad (a_{ki}=\bar{a}_{ik})^*$$

existiere, die bei allen Substitutionen der Gruppe invariant bleibt. Ist diese Form vom Range r $(r<n)$, so läßt sich die betreffende Gruppe von n^{ter} Dimension so transformieren, daß sie in eine r-dimensionale und eine $(n-r)$-dimensionale Gruppe zerlegbar wird.

Will man über die Intransitivität einer gegebenen Gruppe Aufschluß gewinnen, so beansprucht die Anwendung dieses Kriteriums gewisse Rechnungen, welche auf die Bestimmung solcher HERMITEschen Invarianten niederer Ordnung ausgehen: dabei muß sich im Falle einer nichtintransitiven (also transitiven) Gruppe herausstellen, daß diese Invarianten identisch verschwinden, d. h. 0ten Ranges sind. Wenn die Gruppe nur einigermaßen von spezieller Gestalt ist (z. B. sobald sie eine Substitution von kanonischer Form enthält, hauptsächlich, wenn die charakteristische

* $\bar{x}_k$ und $\bar{a}_{ik}$ bezeichnen, wie allgemein üblich, die konjugiert komplexen Werte von x_k bezw. a_{ik}.

Gleichung dieser kanonischen Substitution keine mehrfachen Wurzeln besitzt), so gestalten sich diese Rechnungen schon höchst bequem, wie ich dies bei anderer Gelegenheit an verschiedenen Beispielen zu zeigen gedenke*. Dieses Kriterium läßt sich aber nicht nur praktisch, sondern auch theoretisch gut verwenden, so ließ sich z. B. mit seiner Hilfe die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten einer endlichen Gruppe im allgemeinen leicht charakterisieren.

* * *

1. Um die Notwendigkeit der oben ausgesprochenen Bedingung zu beweisen, nehmen wir zuerst an, daß unsere Gruppe intransitiv ist, und zwar daß sie sich durch Einführung von neuen Variablen X, auf eine Form bringen läßt, in der jede ihrer Substitutionen einerseits nach $X_1, X_2, \ldots, X_r$ und anderseits nach $X_{r+1}, \ldots, X_n$ zerlegbar wird.

Diese Form kann man symbolisch mit

$$\left(\begin{array}{c|c} G_1^{(r)} & 0 \\ \hline 0 & G_2^{(n-r)} \end{array}\right) \qquad \text{(I)}$$

bezeichnen, und es ist klar, daß die Gesamtheit der Matrices r^{ter} und $(n-r)^{\text{ter}}$ Dimension, die wir mit $G_1^{(r)}$ bezw. mit $G_1^{(n-r)}$ bezeichnen, Gruppen bilden.

Betrachten wir nun $G_1^{(r)}$ selbständig, als eine Gruppe in den Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_r$, so existiert nach einem bekannten Satze** eine definit positive HERMITEsche Form

$$H_1(\alpha' \mid X, \overline{X}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \alpha'_{ik} X_i \overline{X}_k, \qquad (\alpha'_{ki} = \overline{\alpha}'_{ik})$$

die bei allen Substitutionen der Gruppe invariant bleibt.

---

* Den Impuls zur Aufsuchung eines solchen Kriteriums erhielt ich nämlich aus der Prüfung der Resultate von gewissen Rechnungen, mit denen mich Herr Prof. G. RADOS im Mathematischen Seminar am Polytechnikum zu Budapest seinerzeit betraut hat.

** Was die Literatur dieses Satzes anbelangt, siehe *Encyclopädie der Math. Wissensch.* I B 3 f. (WIMAN), 8, Fußnoten 37 und 38.

Jede Invariante der Komponenten $G_1^{(r)}$ oder $G_2^{(n-r)}$ kann aber auch als Invariante der ganzen zerlegbaren Gruppe I betrachtet werden. Nur ist H_1 in dieser Auffassung nicht mehr definit, sondern nur semidefinit und zwar genau r^{ten} Ranges. Daraus folgt aber gleich, daß man für die ursprüngliche (intransitive) Gruppe eine solche semidefinite Invariante (von demselben Range) erhält, wenn man in H_1 statt $X_1, X_2, \ldots, X_r$ wieder die ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einführt.

2. Sehen wir nun anderseits, wie man aus der Existenz einer solchen semidefiniten HERMITEschen Invariante auf die Intransitivität der Gruppe schließen kann.

Ist

$$H^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha'_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad (\alpha'_{ki} = \bar{\alpha}'_{ik})$$

eine HERMITEsche Form vom Range $r\,(r < n)$, die bei allen Substitutionen einer Gruppe G invariant bleibt, so läßt sich $H^{(r)}$ bekanntlich stets durch eine geeignete Transformation

$$x = L(X)$$

auf folgende kanonische Form bringen:

$$L' H^{(r)} \bar{L} = K^{(r)} = X_1 \bar{X}_1 + X_2 \bar{X}_2 + \cdots + X_r \bar{X}_r.$$

Wenn wir gleichzeitig auch die Gruppe durch L transformieren, so wird die transformierte Gruppe $L^{-1} G L$ diese kanonische Form invariant lassen*.

Daraus läßt sich aber folgern, daß in den Matrices ihrer Substitutionen gewisse Stellen durchgehends mit Null besetzt sind.

Wenn wir nämlich eine beliebige Substitution

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} X'_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

der so transformierten Gruppe auf die obige kanonische Form anwenden, so entsteht aus den einzelnen Gliedern

---

* Die hier angewandte symbolische Bezeichnungsweise ist die FROBENIUSsche.

$$X_i \overline{X}_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} X_k' \sum_{l=1}^{n} \bar{c}_{il} \overline{X}_l' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ik} \bar{c}_{il} X_k' \overline{X}_l',$$

und diese Ausdrücke sind zu summieren durch die Werte $i = 1, 2, \ldots, r$.

Betrachten wir nun die Koeffizienten der Glieder $X_j' \overline{X}_j'$. Aus jedem der obigen Ausdrücke erhalten wir $c_{ij} \bar{c}_{ij}$, der vollständige Koeffizient ist also

$$c_{1j} \bar{c}_{1j} + c_{2j} \bar{c}_{2j} + \cdots + c_{rj} \bar{c}_{rj}.$$

Da aber jetzt die kanonische Form $\sum_{i=1}^{r} X_i \overline{X}_i$ eine Invariante der Gruppe ist, so müssen diese Koeffizienten für die Werte $j = r+1, r+2, \ldots, n$ verschwinden. Es ist also

$$c_{1j} \bar{c}_{1j} + c_{2j} \bar{c}_{2j} + \cdots + c_{rj} \bar{c}_{rj} = 0$$
$$(j = r+1, r+2, \ldots, n),$$

und da hier die einzelnen Glieder als Produkte konjugierter Werte nicht negativ sein können, so folgt hieraus:

$$c_{1j} = 0, \; c_{2j} = 0, \; \ldots, \; c_{rj} = 0$$
$$(j = r+1, \; r+2, \; \ldots, \; n).$$

Das sagt aber, daß die so transformierten Substitutionen der Gruppe eben alle von derjenigen Form sind, die MASCHKE (a. a. O. p. 367 unter (10)) durch das Schema

$$\left(\begin{array}{c|c} Q_1 & R_1 \equiv 0 \\ \hline R_2 & Q_2 \end{array} \right) \qquad \text{(II)}$$

symbolisiert, wo Q_1 und Q_2 quadratische Matrices von r^2 bezw. $(n-r)^2$ Elementen sind, und R_2 aus $(n-r)$ Zeilen und r Kolonnen besteht.

In dieser transformierten Form haben wir in den Matrices der Gruppe reichlich Stellen, die durchweg mit Nullen besetzt sind, so daß wir schon leicht auf die Intransitivität der Gruppe schließen können. Dazu müssen wir nämlich nicht einmal das Hauptresultat der zitierten MASCHKEschen Note in Anspruch nehmen, denn es sind hier viel engere Bedingungen erfüllt, so daß wir an einen bloßen Hilfssatz anknüpfen können.

Dieser Hilfssatz (a. a. O. § 3 p. 367) sagt eben aus: Wenn alle Matrices einer endlichen Gruppe die unter II symbolisierte Form haben, so läßt sich die Gruppe auf eine nach dem Schema I zerlegbare Form transformieren.

Mit der Bemerkung, daß wir so im Anschluß an die MASCHKEschen Ausführungen nicht nur den vollständigen Beweis unseres Satzes erhalten, sondern auch sogleich die tatsächliche Angabe einer Reihe von Transformationen, die eine intransitive Gruppe in die zerlegbare Form überführen, könnten wir nun abbrechen, wenn die Koeffizienten der ersten MASCHKEschen Transformation nicht mit einer r^2 fachen Unbestimmtheit angegeben wären, die unsere kanonische Form $K^{(r)}$ mit Zerstörung gefährdet. Die Herstellung einer solchen kanonischen Form r^{ten} Ranges kommt aber auch bei MASCHKE später als ein wesentlicher Schritt vor, und so wäre bei der Reduktion der intransitiven Gruppe auf die zerlegbare Form ein und derselbe Schritt eventuell im wesentlichen zweimal zu wiederholen, wenn man dem nicht durch eine nähere Bestimmung der betreffenden Transformationskoeffizienten vorsorgen könnte, was selbst in eindeutiger Weise ohne jeweilige Beschränkung ganz allgemein möglich ist.

Weil es von prinzipieller Wichtigkeit ist, daß sich das Reduktionsverfahren möglichst einfach gestalte, und mit solcher Anomalie nicht behaftet sei, möge es gestattet sein auf die MASCHKEschen Ausführungen auch hier wenigstens in großen Zügen einzugehen, um obige Bemerkungen genügendermaßen klar stellen zu können.

Der Grundgedanke des MASCHKEschen Verfahrens ist, die gegebene endliche Gruppe vom Schema II in die HERMITEsche Normalform so zu transformieren, daß die schon in R_1 befindlichen durchgehenden Nullen nicht zerstört werden. Es läßt sich dann nämlich zeigen, daß in dieser Normalform der Gruppe auch die mit R_1 symmetrisch liegenden Koeffizienten alle verschwinden müssen.

Diese HERMITEsche Normalform der Gruppe erhält MASCHKE in drei Schritten. Er legt eine beliebige definite HERMITEsche Invariante zugrunde und bestimmt zuerst eine Transformation,

welche die Nullstellen in R_1 unberührt läßt, so, daß die HERMITEsche Invariante in den neuen Variablen y nach den Systemen $y_1, y_2, \ldots, y_r$ und $y_{r+1}, \ldots, y_n$ zerlegbar wird, d. h. die Gestalt

$$H_1 + H_2 = \sum_{i,k=1}^{r} \beta_{ik}\, y_i\, \overline{y}_k + \sum_{i,k=r+1}^{n} \beta_{ik}\, y_i\, \overline{y}_k$$

annimmt. Dann sind nur noch zweitens und drittens die einzelnen Summanden H_1 und H_2 auf die kanonische Form zu bringen, wobei man einerseits die $y_1, y_2, \ldots, y_r$ und anderseits die $y_{r+1}, \ldots, y_n$ nur unter sich zu transformieren hat, was die Nullstellen in R_1 wieder unberührt läßt.

Vor allem wollen wir bemerken, daß nicht nur $H_1 + H_2$ als Ganzes, sondern auch H_1 und H_2 an und für sich Invarianten der in der Gestalt II erscheinenden Gruppe sind.

Bezeichnet man nämlich die einerseits statt $y_1, y_2, \ldots, y_r$ und anderseits statt $y_{r+1}, \ldots, y_n$ eingeführten neuen Variablen mit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ und bezw. mit $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$, so sieht man (nachdem die transformierte Gruppe zerlegbar ist), daß

$$K_1 + K_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \overline{Y}_i$$

nur so invariant sein kann, wenn die beiden Teile

$$K_1 = \sum_{i=1}^{r} Y_i \overline{Y}_i \quad \text{und} \quad K_2 = \sum_{i=r+1}^{n} Y_i \overline{Y}_i$$

an und für sich invariant sind. Dann müssen aber auch die ursprünglichen H_1 und H_2 als selbständige Invarianten bestehen.

Nun betrachten wir näher den ersten Schritt des MASCHKEschen Reduktionsverfahren. Diese Zerlegung der H bewirkt MASCHKE durch eine Transformation von der Gestalt (a. a. O. p. 367 unter (11)):

$$\begin{cases} X_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}\, y_k & (i = 1, 2, \ldots, r) \\ X_i = y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}\, y_k. & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

Man bemerkt gleich, daß bei einer Transformation von dieser Gestalt die Nullstellen in R_1 unberührt bleiben, die kanonische

Form r^{ten} Ranges

$$K^{(r)} = X_1\overline{X}_1 + \cdots + X_r\overline{X}_r$$

hingegen, welche wir eben früher erhalten haben, wird durch sie im allgemeinen zerstört. Da es sich aber beim nächstfolgenden Schritt eben wieder um die Herstellung einer solchen kanonischen Form r^{ten} Ranges handelt, so wird es nicht ohne Interesse sein, zu zeigen, daß die MASCHKEsche Zerlegung einer H immer durch eine Transformation, von folgender spezielleren Gestalt möglich ist:

$$(T)\quad \begin{cases} X_i = y_i & (i = 1, 2, \ldots, r) \\ X_i = y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} y_k. & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

Es sei also

$$H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} X_i \overline{X}_k \qquad (\alpha_{ki} = \overline{\alpha}_{ik})$$

eine beliebige definite HERMITEsche Invariante unserer endlichen Gruppe. Wir haben die Transformationskoeffizienten λ_{ik} so zu bestimmen, daß in $T'H\overline{T}$ alle Glieder $y_k\overline{y}_\mu$ herausfallen sollen, in welchen $k \leq r$ und $\mu > r$ ist (denn gleichzeitig verschwinden ihre konjugierten auch).

Zu diesem Zwecke berechnet MASCHKE zuerst die Koeffizienten von $\overline{y}_{r+1}, \overline{y}_{r+2}, \ldots, \overline{y}_n$. Wir wollen hier den von ihm erhaltenen Ausdruck (13) des Koeffizienten von $\overline{y}_\mu$ $(\mu = r+1, \ldots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i\mu}\,\lambda_{ik}\,y_k + \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k\mu}\,y_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i\mu}\,\lambda_{ik}\,y_k + \sum_{i=r+1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i\mu}\,\lambda_{ik}\,y_k + \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k\mu}\,y_k$$

$$(\mu = r+1, \ldots, n)$$

einfach für unseren Fall spezialisieren, indem wir im ersten Teil der Doppelsumme für $i, k = 1, 2, \ldots, r$

$$\lambda_{kk} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{ik} = 0 \qquad (i \gtrless k)$$

setzen. Wir erhalten dadurch

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_{k\mu}\,y_k + \sum_{i=r+1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i\mu}\,\lambda_{ik}\,y_k + \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k\mu}\,y_k$$

$$(\mu = r+1, \ldots, n).$$

Die λ_{ik} sind nun so zu bestimmen, daß in diesen $n-r$ Ausdrücken die Koeffizienten von $y_1, y_2, \ldots, y_r$ Null werden, was auf folgendes Gleichungssystem führt:

$$\alpha_{k\mu} + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_{i\mu}\,\lambda_{ik} = 0. \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, r \\ \mu = r+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Dieses System von $r(n-r)$ linearen Gleichungen mit $r(n-r)$ Unbekannten ist aber nach folgenden r Reihen der Unbekannten

$$\lambda_{r+1,k}, \lambda_{r+2,k}, \ldots, \lambda_{nk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

in kleinere Systeme zerlegbar:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{r+1,r+1}\,\lambda_{r+1,k} + \alpha_{r+2,r+1}\,\lambda_{r+2,k} + \cdots + \alpha_{n,r+1}\,\lambda_{nk} = -\alpha_{k,r+1} \\ \alpha_{r+1,r+2}\,\lambda_{r+1,k} + \alpha_{r+2,r+2}\,\lambda_{r+2,k} + \cdots + \alpha_{n,r+2}\,\lambda_{nk} = -\alpha_{k,r+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{r+1,n}\,\lambda_{r+1,k} + \alpha_{r+2,n}\,\lambda_{r+2,k} + \cdots + \alpha_{nn}\,\lambda_{nk} = -\alpha_{kn} \end{array}\right.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

Die Koeffizienten dieser r Systeme von $(n-r)$ linearen Gleichungen in ebensoviel Unbekannten sind gemeinsam, nur die rechten Seiten sind verschieden. Ihre gemeinsame Determinante

$$|\,\alpha_{pq}\,| \qquad (p, q = r+1, \ldots, n)$$

ist als Hauptminor einer definiten HERMITEschen Form immer von Null verschieden, folglich sind die $r(n-r)$ Werte λ_{ik} immer eindeutig bestimmt. Wir können sogar die λ_{ik} explizite angeben. Es ist nämlich

$$\lambda_{ik} = -\frac{\sum_{l=r+1}^{n} \alpha_{kl}\,U_{il}}{|\,\alpha_{pq}\,|}, \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, r \\ i, p, q = r+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

wo U_{il} $(i, l = r+1, \ldots, n)$ die Unterdeterminante $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von α_{il} im Hauptminor $|\,\alpha_{pq}\,|$ $(p, q = r+1, \ldots, n)$ bezeichnet.

Nachdem nun die ersten r Variablen durch T eigentlich nicht transformiert werden, sondern nur eine andere Bezeichnung bekommen, so bleibt die einmal schon gewonnene kanonische Invariante $K^{(r)}$ der ersten r Variablen erhalten und muß nicht eventuell noch einmal aus H_1 wieder hergestellt werden, denn man kann von

nun an statt $T'HT = H_1 + H_2$ einfach $K^{(\sigma)} + H_2$ nehmen*, und man hat dann nur noch H_2 zu kanonisieren, um eine HERMITEsche Normalform der Gruppe ohne Zerstörung der in R_1 befindlichen Nullen zu erhalten. Der Beweis der Zerlegbarkeit einer solchen Gruppe ist schon leicht, doch können wir darauf natürlich nicht eingehen, sondern müssen auf die öfters zitierten MASCHKEschen Ausführungen verweisen.

Die Kenntnis einer semidefiniten HERMITEschen Invarianten $H^{(\sigma)}$ einer endlichen Gruppe linearer Substitutionen erlaubt also nicht nur die Intransitivität der betreffenden Gruppe auszusprechen, sondern setzt uns zugleich in die Lage, die Transformation dieser intransitiven Gruppe in die zerlegbare Form effektiv auszuführen und zwar, wie wir oben gesehen haben, in folgenden drei Schritten: erstens die Kanonisierung der $H^{(\sigma)}$, zweitens die Zerlegung einer beliebigen definiten H in $H_1 + H_2$ durch die vereinfachte Transformation T, endlich drittens die Kanonisierung der H_2.

---

* Wie eine endliche Gruppe verschiedene semidefinite Invarianten ρ^{ten} Ranges haben kann, siehe folgenden Artikel: „Über die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten etc."

8.

ÜBER DIE GESAMTHEIT DER HERMITESCHEN INVARIANTEN EINER ENDLICHEN GRUPPE LINEARER SUBSTITUTIONEN.

Von ALADÁR VISNYA in Nagy-Várad.

Übersetzt aus „Mathematikai és Physikai Lapok" (Mathematische und physikalische Blätter) Bd. XII (1903), p. 355—371.

Das in der vorangehenden Note bewiesene Kriterium der Intransitivität von endlichen Gruppen linearer Substitutionen ist nicht nur praktisch gut brauchbar, sondern läßt sich auch zu theoretischen Untersuchungen verwenden. Es sei gestattet, hier die nächstliegenden dieser theoretischen Resultate vorzulegen, die gewissermaßen eine Ergänzung des zuvor angewandten Satzes sind, nach welchem jede endliche Gruppe linearer Substitutionen eine positive definite HERMITEsche Form invariant läßt.

Dieser Satz kann am einfachsten so bewiesen werden, daß man (nach MOORE*) zeigt, wie man eine solche Form tatsächlich erhält. Die so gewonnene Form bleibt natürlich auch dann eine Invariante, wenn man sie mit beliebigen konstanten Faktoren multipliziert und bleibt auch zugleich definit positiv, wenn dieser Faktor positiv gewählt wurde. Diese neuen Formen kann man aber natürlich nicht als wesentlich verschiedene Invarianten der Gruppe betrachten. Es entsteht also die Frage, ob eine endliche lineare Gruppe überhaupt verschiedene HERMITEsche Invarianten besitzen kann?

---

* An Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions etc. (*Math. Ann.* Bd. 50 p. 213).

Man sieht sogleich, daß die Frage in innigem Zusammenhange mit der Intransitivität der Gruppen ist. Bei intransitiven Gruppen nämlich ist die Frage stets zu bejahen. Denn bringt man die intransitive Gruppe gleich auf die zerlegbare Form, welche wieder, wie in der vorangehenden Note, durch das Schema:

$$\left(\begin{array}{c|c} G_1^{(r)} & 0 \\ \hline 0 & G_2^{(n-r)} \end{array} \right) \qquad (I)$$

symbolisiert sei, so besitzen die Komponenten $G_1^{(r)}$ und $G_2^{(n-r)}$ allerdings je eine definit posive Invariante H_1 und H_2 von r^{ter} bezw. $(n-r)^{\text{ter}}$ Dimension. Dann sind aber sämtliche Formen, welche die Schar

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$$

liefert, Invarianten der aus $G_1^{(r)}$ und $G_2^{(n-r)}$ zusammengesetzten Gruppe und in dieser Formenschar sind schon auch wesentlich verschiedene definit positive Formen enthalten. Es bleibt aber noch immer fraglich, ob durch diese Schar die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten der betreffenden Gruppe erschöpft ist. Und so gelangt man zur Fragestellung, ob es nicht möglich wäre, den Satz über die Existenz der HERMITEschen Invarianten der endlichen linearen Substitutionsgruppen dadurch zu ergänzen, daß man auch über ihre Gesamtheit Aufschluß gewinne. In dem folgenden wollen wir zeigen, daß, wenn die Gruppe wenigstens eine Substitution enthält, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, die Verhältnisse sich sehr einfach gestalten.

Damit ist allerdings die Frage nur „im allgemeinen" erledigt*, und man kann nach Fallenlassen der obigen Beschränkung auf wesentlich kompliziertere Verhältnisse stoßen, wie wir dies später an einem Beispiele zeigen werden.

---

* Als Beispiele verwandter Untersuchungen, bei denen auch die gleiche Einschränkung durchgehends beibehalten ist, können wir erwähnen: H. MASCHKE, Über den arithmetischen Charakter der Koeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen (*Math. Ann.* Bd. 50 p. 492; A. LOEWY, Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen (*Math. Ann.* Bd. 53 p. 225).

Der Satz, durch den die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten im allgemeinen charakterisiert ist, lautet folgendermaßen: Enthält eine endliche Gruppe linearer Substitutionen wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, und ist sie (falls sie intransitiv wäre) auf eine solche Form transformiert, bei der die Gruppen $G_1^{(n_1)}, G_2^{(n_2)}, \ldots, G_k^{(n_k)}$*, in die sie zerlegbar ist, schon alle transitiv sind, so läßt sich die Gesamtheit ihrer HERMITEschen Invarianten durch die k-dimensionale Formenschar

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_k H_k$$

darstellen, wo $H_1, H_2, \ldots, H_k$ der Reihe nach definit positive Invarianten (in bezw. $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Variablen) der einzelnen Komponenten $G_1^{(n_1)}, G_2^{(n_2)}, \ldots, G_k^{(n_k)}$ bedeuten.

$k = 1$ gibt den Fall der transitiven Gruppen. Von diesen besagt unser Satz, daß, falls sie der erwähnten Bedingung Genüge leisten, von einem konstanten Faktor abgesehen, nur eine einzige HERMITEsche Invariante haben. Ist hingegen $k > 1$, also die Gruppe intransitiv, so läßt sich der Inhalt des Satzes kurz dahin zusammenfassen, daß die linearen Kompositionen von den Invarianten der einzelnen Teile (die man aber gleich auch als Invarianten der ganzen Gruppe auffassen kann) die Gesamtheit der Invarianten der Gruppe gänzlich erschöpfen, gesetzt natürlich, daß die obige Beschränkung erfüllt ist, denn das vorher angemeldete Beispiel wird uns eben zeigen, daß im Gegenfalle sich die Verhältnisse schon nicht immer so einfach gestalten.

Schon bei der Aussprache des Satzes ist es, wie wir sehen,

---

* So daß die Dimensionen dieser „Komponenten" als Summe die Dimension der Gruppe geben:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Falls $k > 2$, können wir die Gruppe als mehrfach intransitiv bezeichnen. Um bei einer solchen Gruppe zur oben angegebenen „definitiven" Zerlegung zu gelangen, hat man nur die bei der ersten Zerlegung erhaltenen Gruppen $G_1^{(r)}$ und $G_2^{(n-r)}$ auf die Intransitivität weiter zu prüfen und sie eventuell allmählich weiter zu zerlegen.

nach der Natur der Sache nötig die intransitiven Gruppen in ihrer zerlegbaren Gestalt (und zwar in einer „definitiven") zu betrachten, beim Beweis ist es aber außerdem zweckmäßig diese noch weiter zu spezialisieren und auf eine gewisse Normalform über zu gehen.

MASCHKE* hat gezeigt, daß man jede endliche lineare Substitutionsgruppe so transformieren kann, daß 1) eine beliebige aus der Gruppe herausgegriffene Substitution S in der kanonischen Form, und gleichzeitig 2) die Gruppe selbst in der HERMITEschen Normalform erscheint.

Bei den intransitiven Gruppen kann man aber noch weiter gehen und sie so auf eine zerlegbare Form transformieren, daß gleichzeitig 1) eine beliebige S in der kanonischen Form und 2) jede einzelne Komponente der Gruppe transitiv und in der HERMITEschen Normalform erscheint.

Hierzu hat man zuerst auf eine zerlegbare Form zu transformieren, in der die Komponenten $G_1^{(n_1)}$, $G_2^{(n_2)}$, ..., $G_k^{(n_k)}$ schon alle transitiv sind. Weil dann die den einzelnen Komponenten $G_i^{(n_i)}$ angehörenden Variablen nur untereinander substituiert werden, ist es leicht einzusehen, daß das übrige von Schritt zu Schritt partiell in den einzelnen $G_i^{(n_i)}$ erreichbar ist.

Wenn wir also annehmen wollen, daß in der zu betrachtenden Gruppe wenigstens eine Substitution existiert, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln liefert, so ist zugleich auch jene Annahme gerechtfertigt, daß die Gruppe so auf eine zerlegbare Gestalt

$$G = G_1^{(n_1)} + G_2^{(n_2)} + \cdots + G_k^{(n_k)}$$
$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$$

gebracht ist, daß in ihr eine Substitution S mit lauter verschiedenen Wurzeln in der kanonischen Form erscheint und die Komponenten $G_1^{(n_1)}$, $G_2^{(n_2)}$, ..., $G_k^{(n_k)}$ alle transitiv, und von der HERMITEschen Normalform sind, das heißt der Reihe nach die kanonischen Formen:

* Bestimmung aller ternären und quaternären Kollineationsgruppen, welche etc. § 2 (*Math. Ann.* Bd. 51, p. 258).

$$K_1 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_{n_1}\bar{x}_{n_1}$$
$$K_2 = x_{n_1+1}\bar{x}_{n_1+1} + \cdots + x_{n_1+n_2}\bar{x}_{n_1+n_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_k = x_{n-n_k+1}\bar{x}_{n-n_k+1} + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

als Invarianten besitzen.

Bei diesen Annahmen kann man sich leicht überzeugen, daß die Formenschar

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k$$

die Gesamtheit der zur Gruppe gehörenden invarianten HERMITEschen Formen erschöpft.

Ist nämlich eine periodische Substitution von der kanonischen Form

$$(S)\begin{cases} x_1 = \varepsilon_1 x_1' \\ x_2 = \varepsilon_2 x_2' \\ \cdots\cdots \\ x_n = \varepsilon_n x_n', \end{cases}$$

wo die ε_i sämtlich Einheitswurzeln sind, so kann bei ihr eine HERMITEsche Form

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}x_i\bar{x}_k \qquad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik})$$

nur dann invariant sein, wenn alle α_{ik} verschwinden, für welche $\lambda_i \neq \lambda_k$ ist.*

Bei uns sind in S sämtliche ε_i von einander verschieden, die Gruppe G kann also invariante HERMITEsche Formen nur von der speziellen Gestalt

$$H = \mu_1 x_1\bar{x}_1 + \mu_2 x_2\bar{x}_2 + \cdots + \mu_n x_n\bar{x}_n$$

besitzen. Es sei aber noch bemerkt, daß wir uns jetzt schon nicht gerade nur auf die positiven definitiven Formen beschränken müssen; die μ_i können also auch negativ sein, natürlich aber nur reell.

Wenn also hier jetzt nicht

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n$$

* MASCHKE, am zuletzt angeführten Ort.

wäre, so ist es immer erlaubt der Bequemlichkeit halber eine solche Reihenfolge der Variablen anzunehmen, daß

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s < \mu_{s+1} \leqq \cdots \leqq \mu_{n_1} \qquad (s < n_1)$$

sei. Dann ist aber

$$H - \mu_1 K_1 = (\mu_{s+1} - \mu_1)\, x_{s+1}\, \bar{x}_{s+1} + \cdots + (\mu_{n_1} - \mu_1)\, x_{n_1}\, \bar{x}_{n_1} + \\ + \mu_{n_1+1}\, x_{n_1+1}\, \bar{x}_{n_1+1} + \cdots + \mu_n x_n \bar{x}_n$$

ebenfalls eine Invariante unserer Gruppe. Weil jedoch einerseits $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ und anderseits die übrigen Variablen bei unserer Gruppe nur untereinander substituiert werden, so ist das nur so möglich, wenn

$$(\mu_{s+1} - \mu_1)\, x_{s+1}\, \bar{x}_{s+1} + \cdots + (\mu_{n_1} - \mu_1)\, x_{n_1}\, \bar{x}_{n_1}$$

bei der Gruppe $G_1^{(n_1)}$ invariant bleibt. Die Möglichkeit einer solchen Invariante ist aber in diesem Falle schon von vornherein ausgeschlossen worden. Das wäre nämlich eine semidefinit positive Form vom Range $n_1 - s_1$, weil laut unseren Bedingungen alle ihre Koeffizienten positiv sind. Wenn aber eine solche HERMITEsche Invariante niedrigeren Ranges existieren möchte $(n_1 - s_1 \neq 0)$, so müßte, wie wir gelegentlich gezeigt haben, $G_1^{(n_1)}$ intransitiv sein, was der ursprünglichen Annahme, daß die Zerlegung der Gruppe G in lauter transitive Gruppen schon vollendet ist, widerspricht. Ist also $G_1^{(n_1)}$ wirklich transitiv, so muß

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n_1}$$

sein.

Jetzt kann man aber die auf die ersten n_1 Variablen bezügliche Gruppe $G_1^{(n_1)}$ von der Gruppe G absondern und bei der übrig bleibenden Gruppe $(n - n_1)^{\text{ter}}$ Dimension, mit der Invariante $H - \mu_1 K_1$ die ähnliche Überlegung wiederholen. So erhält man, daß, wenn auch $G_2^{(n_2)}$ faktisch transitiv ist,

$$\mu_{n_1+1} = \mu_{n_1+2} = \cdots = \mu_{n_1+n_2}$$

sein muß. Auf diese Weise hat man fortzufahren, bis man endlich zu

$$\mu_{n-n_k+1} = \mu_{n-n_k+2} = \cdots = \mu_n$$

gelangt, und sieht, daß H wirklich der Formenschar

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k$$

angehören muß.

Die in dieser Formenschar enthaltenen unendlich vielen HERMITEschen Invarianten können natürlich nicht sämtlich als wesentlich verschieden betrachtet werden. Die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen ist genau k, und durch k solche Formen sind die übrigen schon gänzlich bestimmt. Es ist außerdem leicht einzusehen, daß die Auswahl dieser k unabhängigen Formen immer so stattfinden kann, daß sie alle definit positiv seien, denn wenn man wie vorher die Darstellung der Schar durch

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k$$

betrachtet, so hat man, um eine definit positive Form zu erhalten, nur sämtliche Parameter λ positiv zu wählen.

Es ist noch übrig, wie schon angemeldet war, zu beweisen, daß die in dem Obigen beibehaltene Beschränkung wirklich wesentlich ist. Hierzu genügt es, ein Beispiel zu konstruieren, welches zeigt, daß sich die Verhältnisse übrigens wesentlich verschieden gestalten können. Es wäre natürlich am interessantesten, wenn wir als Beispiel eine transitive Gruppe anführen könnten, die nicht nur eine einzige HERMITEsche Invariante besitzt. Die in der Literatur von uns vorgefundenen transitiven Gruppen erfüllen aber alle unsere Beschränkung, und zur Konstruktion eines Beispiels ließen sich keine geeigneten Anhaltspunkte finden. (Es liegt sogar die Vermutung nahe, daß solche transitive Gruppen überhaupt nicht existieren können). Ganz leicht ist es aber, zerlegbare (und so auch intransitive) Gruppen anzugeben, bei denen die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten durch die linearen Kompositionen der zu ihren Teilen gehörenden HERMITEschen Formen nicht erschöpft wird.

Als Beispiel sei diejenige quaternäre Gruppe angeführt, die man erhält, wenn man aus jeder Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

der binären Tetraedergruppe* die folgende quaternäre Substitution bildet:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Die Erzeugenden der binären Tetraedergruppe können folgendermaßen angegeben werden (H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra* 2. Aufl., II. Bd., p. 257):

$$\Theta = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}.$$

Wenn man hierzu noch folgende Bezeichnungen einführt:

$$\psi = \Theta\chi\,\Theta\chi^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \Theta^2 = \chi^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so kann man die 24 Substitutionen der Gruppe folgendermaßen symbolisch angeben:

$$\begin{aligned} &1,\ \Theta,\ \psi,\ \Theta\psi, \\ &\chi,\ \Theta\chi,\ \psi\chi,\ \Theta\psi\chi, \\ &\chi^2,\ \Theta\chi^2,\ \psi\chi^2,\ \Theta\psi\chi^2, \end{aligned}$$

außerdem noch jede mit Γ multipliziert (was dem entspricht, daß jeder Koeffizient entgegengesetztes Vorzeichen erhält).

Die erzeugenden Substitutionen unserer quaternären Gruppe werden also

* Es liegt die Vermutung sehr nahe, daß die in dem folgenden entwickelten Verhältnisse weder bloß an das binäre Gebiet, noch speziell an den Tetraedertypus gebunden sind, und es ist mir seit der ungarischen Veröffentlichung dieser Abhandlung auch wirklich gelungen, den Fall der ähnlichen „Verdoppelung" (oder auch „Vervielfachung") einer transitiven oder intransitiven Gruppe von beliebiger Dimension und von beliebigem Typus durch eine eigentümliche symbolische Rechnung zu erledigen. *(Nachträgliche Bemerkung zur deutschen Veröffentlichung.)*

$$\Theta' = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\chi' = \begin{Bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{Bmatrix}$$

sein, aus denen sich die Gruppe ebenfalls nach den obigen Symbolen zusammenstellen läßt.

Weil die charakteristische Determinante einer zerlegbaren Form auch selbst zerlegbar ist:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix}^2,$$

so sieht man gleich, daß es in dieser quaternären Gruppe keine Substitution gibt, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hätte.

Wir wollen nun die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten dieser Gruppe bestimmen.

Es genügt hierzu die erzeugenden Substitutionen auf eine beliebige HERMITEsche Form

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i \bar{x}_k \qquad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik})$$

anzuwenden, und die Koeffizienten α_{ik} so zu bestimmen, daß H bei diesen invariant bleibe. Da nämlich aus diesen erzeugenden Substitutionen alle übrigen gewonnen werden können, so wird auch die ganze Gruppe die so erhaltene Form invariant lassen.

Führen wir zuerst die Substitution Θ aus. Diese ist von kanonischer Gestalt wie S auf Seite 192. Folglich muß nach

dem dort zitierten Satze

$$\alpha_{12} = 0,\ \alpha_{14} = 0,\ \alpha_{23} = 0,\ \alpha_{34} = 0$$

sein.

Man hat also weiter nur folgende (nach x_1, x_3 und x_2, x_4 zerlegbare) HERMITEsche Form zu betrachten:

$$H^* = \alpha_{11} x_1 \bar{x}_1 + \alpha_{13} x_1 \bar{x}_3 + \bar{\alpha}_{13} x_3 \bar{x}_1 + \alpha_{33} x_3 \bar{x}_3 + \alpha_{22} x_2 \bar{x}_2 + \alpha_{24} x_2 \bar{x}_4 + \bar{\alpha}_{24} x_4 \bar{x}_2 + \alpha_{44} x_4 \bar{x}_4.$$

Auf diese sollte man jetzt χ' anwenden. Es ist aber zweckmäßig vorher auch ψ' herbeizuziehen. Durch Ausführung von

$$\psi' \ldots \begin{cases} x_1 = i x_2' \\ x_2 = i x_1' \\ x_3 = i x_4' \\ x_4 = i x_3' \end{cases}$$

geben die einzelnen Glieder der oberen Reihe gerade solche vom Typus der eben unter ihnen stehenden, und umgekehrt. Daher muß, falls H Invariante unserer Gruppe sein soll, noch

$$\alpha_{11} = \alpha_{33} = \lambda, \quad \alpha_{22} = \alpha_{44} = \mu, \quad \alpha_{13} = \alpha_{24} = \nu$$

sein.

So daß man die Substitution

$$\chi' \ldots \begin{cases} x_1 = \frac{1-i}{2}(x_1' + x_2') \\ x_2 = -\frac{1+i}{2}(x_1' - x_2') \\ x_3 = \frac{1-i}{2}(x_3' + x_4') \\ x_4 = -\frac{1+i}{2}(x_3' - x_4') \end{cases}$$

nur auf

$$H^{**} = \lambda(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2) + \mu(x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4) + \nu(x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_4) + \bar{\nu}(x_3\bar{x}_1 + x_4\bar{x}_2)$$

anzuwenden hat.

Wir bemerken — was leicht zu verifizieren ist — daß die binäre Tetraedergruppe in HERMITEscher Normalform angegeben war. So sind also

$$H_1 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$$

und

$$H_2 = x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$$

invariant. Es handelt sich demnach nur noch darum, ob der in der unteren Reihe stehende Ausdruck auch invariant ist, oder ν verschwinden müsse, wenn H^{**} bei unserer Gruppe invariant bleiben soll.

Durch die einfache Rechnung

$$x_1\bar{x}_3 = \frac{1-i}{2}\,\frac{1+i}{2}\,(x_1' + x_2')\,(\bar{x}_3' + \bar{x}_4')$$

$$x_2\bar{x}_4 = +\frac{1+i}{2}\,\frac{1-i}{2}\,(x_1' - \bar{x}_2')\,(\bar{x}_3' - \bar{x}_4')$$

$$\begin{aligned} x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_4 &= \tfrac{1}{2}\,(x_1'\bar{x}_3' + x_1'\bar{x}_4' + x_2'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_4') \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\,(x_1'\bar{x}_3' - x_1'\bar{x}_4' - x_2'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_4') \\ &= x_1'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_4' \end{aligned}$$

kann man sich versichern, daß

$$h = x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_4,$$

und somit auch ihre konjugierte

$$\bar{h} = x_3\bar{x}_1 + x_4\bar{x}_2$$

invariant sind.

Man sieht also, daß die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten unserer Gruppe nicht einfach die lineare Komposition

$$\lambda H_1 + \mu H_2$$

der Invarianten H_1 und H_2 ihrer einzelnen Teile ist. Deshalb kann man hier mehr als zwei wesentlich verschiedene definit positive HERMITEsche Invarianten der Gruppe aufschreiben. So z. B. folgende vier:

$$\begin{aligned} D_1 &\equiv H_1 + H_2 \\ D_2 &\equiv H_1 + 2H_2 \\ D_3 &\equiv H_1 + 2H_2 + h + \bar{h} \\ D_4 &\equiv H_1 + 2H_2 - ih + i\bar{h}. \end{aligned}$$

Daß auch die beiden letzten definit positiv sind, läßt sich dadurch zeigen, daß man sie auf die kanonische Form bringt:

$$D_3 \equiv (x_1 + x_3)\,(\bar{x}_1 + \bar{x}_3) + (x_2 + x_4)\,(\bar{x}_2 + \bar{x}_4) + x_3\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4$$

$$D_4 \equiv (x_1 + ix_3)\,\overline{(x_1 + ix_3)} + (x_2 + ix_4)\,\overline{(x_2 + ix_4)} + x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4.$$

Man kann auch gleich sehen, daß sie linear unabhängig sind, denn

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 + \lambda_4 D_4 = 0$$

möchte bedingen, daß gleichzeitig

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 - i\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 + i\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

sei. Die Determinante dieses linearen Gleichungssystems ist aber

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 0,$$

somit kann die obige Identität nur dann bestehen, wenn sämtliche λ verschwinden.

Endlich sei noch gestattet eine Schlußfolgerung anzugeben, welche durch die Kenntnis der HERMITEschen Invarianten der endlichen linearen Substitutionsgruppen ermöglicht wird.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist der folgende Satz bekannt*: „Zerlegt man einen homogenen linearen Differentialausdruck auf verschiedene Weise in irreduzible Faktoren:

$$P = Q_k Q_{k-1} \cdots Q_2 Q_1,$$

so können sich die Ordnungszahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$ dieser Faktoren bei den verschiedenen Zerlegungen nur höchstens in der Reihenfolge unterscheiden." Wendet man diesen Satz auf die algebraisch

* E. LANDAU: Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialgleichungen in irreduzible Faktoren (*Crelle's Journal* Bd. 124 p. 115) und was hauptsächlich den Zusammenhang mit den linearen Gruppen anbelangt: A. LOEWY, Über die irreduziblen Faktoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes (*Sächsische Berichte* 1902 p. 1).

Die Andeutung, daß der weiter unten folgende Satz auch aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ermittelt werden kann, habe ich Herrn Prof. E. BEKE zu verdanken.

integrierbaren linearen Differentialgleichungen in Verbindung mit ihren Rationalitätsgruppen an, so folgt daraus für die endlichen Gruppen linearer Substitutionen der Satz:

Transformiert man eine intransitive endliche Gruppe linearer Substitutionen auf verschiedene Weise in zerlegbare Gruppen, aber so, daß die einzelnen Komponenten $G_1^{(n_1)}$, $G_2^{(n_2)}$, ..., $G_k^{(n_k)}$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$ schon alle transitiv sind, so können in diesen verschiedenen Gestalten der Gruppe die Dimensionszahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ höchstens nur in der Reihenfolge verschieden sein.

Dieser Satz ist schon deswegen wichtig, weil man solange nicht mit weitergehender Terminologie von zweifach, dreifach etc.* intransitiven Gruppen sprechen kann, bis nicht festgestellt ist, ob nicht dieselbe Gruppe in einer anderen Gestalt auf mehr oder weniger transitive Gruppen zerspaltet werden kann.

Es wird für unseren Satz natürlich auch ein rein formentheoretischer Beweis erwünscht sein. Zu einem solchen hat man nur die Kenntnis der Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten nötig, denn laut unserem Kriterium wird die Betrachtung der in dieser Formenschar enthaltenen semidefiniten Formen den Satz sogleich ergeben.

Wir wollen dies für den Fall zeigen, in welchem wir die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten schon bestimmt haben, d. h. für die Gruppen, in denen es wenigstens eine Substitution mit lauter verschiedenen Wurzeln gibt.

Der Kürze wegen sei die zu betrachtende Gruppe einfach in der auf S. 191 angegebenen Form aufgeschrieben. Die Gesamtheit der Invarianten ließ sich dort in der Gestalt

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k \qquad \text{(I)}$$

darstellen.

Nehmen wir nun an, daß dieselbe Gruppe auf eine andere Gestalt transformiert, in transitive Gruppen von den Dimensionen

---

* k-fach intransitiv wäre die Gruppe zu nennen, welche auf eine in $(k+1)$ transitive Gruppen zerlegbare Gestalt gebracht werden kann (so daß die Gruppen, welche in zwei transitive Gruppen zerlegt werden können, einfach intransitiv sind).

$m_1, m_2, \ldots, m_l$ zerlegbar wird, wo ebenfalls

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$$

ist.

Da die beiden Gestalten der Gruppe äquivalent (d. h. durch lineare Transformation ineinander überführbar) sind, müssen auch die zu diesen neuen Komponenten gehörenden Invarianten $H_1, H_2, \ldots, H_l$ gewissen Elementen der Schar I äquivalent sein, für welche ursprüngliche Formen $m_1, m_2, \ldots, m_l$ der Reihe nach die Rangzahlen bedeuten.

Nachdem jedes H andere Variablen enthält, sind sie linear unabhängig, und weil auch diese neue Zerlegung als eine endgültige angenommen wurde, muß auch die Schar

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \cdots + \mu_l H_l$$

die Gesamtheit der HERMITEschen Invarianten der Gruppe ergeben (natürlich aber zur neuen Gestalt der Gruppe gehörend). Daraus folgt vor allem, daß

$$l = k$$

sein muß.

Aus der Formenschar I erhält man aber dann und nur dann eine Form von niedrigerem Range als n, wenn einzelne λ verschwinden. Nimmt man z. B. eine Form $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, so ist ihre Rangzahl schon $n_1 + n_2$, man sieht daher gleich, daß man die den H_i äquivalenten Formen niedrigeren Ranges, d. h. k linear unabhängige Formen, von denen die Summe der Rangzahlen n ist, nur so auswählen kann, wenn man die vollständige Reihe der verschiedenen K_i nimmt, jede noch eventuell mit einem positiven Faktor multipliziert. Auf diese Weise können die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_l$ von den $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nur in der Reihenfolge verschieden sein.

9.

BESTIMMUNG DES KOEFFIZIENTEN DER INNERN REIBUNG DER GASE NACH EINER NEUEN EXPERIMENTELLEN METHODE.

Auf Veranlassung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Kommission der ungarischen Akademie ausgeführt von

GYŐZŐ ZEMPLÉN.

Der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt vom o. M. ROLAND Baron v. EÖTVÖS in der Sitzung am 23. Oktober 1905.

Im Jahre 1901 habe ich in den *„Mathematikai és Physikai Lapok"** die Nachteile der Methoden besprochen, welche bis jetzt zur Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung der Gase gedient haben; insbesondere handelte es sich um die Methode der schwingenden Scheiben von MAXWELL** und um die Transpirationsmethode von GRAHAM - O. E. MEYER***. Diese Nachteile veranlaßten mich, an Stelle der Torsionsschwingungen der MAXWELLschen Scheiben diejenige einer im Gase schwingenden Kugelscheibe zu beobachten. In derselben Arbeit habe ich auch die Resultate einiger vorläufiger Probemessungen mitgeteilt, laut welchen die Methode sich auch praktisch brauchbar erwies; die Unvollkommenheit der damaligen experimentellen Anordnung

---

* PROBEMESSUNGEN zur Bestimmung der inneren Reibung der Gase nach einer neuen experimentellen Methode (ungarisch), *Math. és Phys. Lapok*, Bd. 10.

** *London Phil. Trans.* 156, 1860 = *Scient. Papers* Bd. 2 p. 1.

*** *Lond. Phil. Trans.* 136, 1846, p. 573; 139, 1849, p. 349 (GRAHAM) und *Pogg. Ann.* 1866, Bd. 127, p. 253 u. 353 (O. E. MEYER).

verhinderte mich jedoch daran, den absoluten Wert des Reibungskoeffizienten eines Gases in zuverlässiger Weise zu bestimmen.* Seitdem gelang es mir mit Unterstützung der ungarischen Akademie einen den Anforderungen solcher delikaten Messungen entsprechenden Apparat zu konstruieren: in der folgenden Arbeit werde ich außer der Beschreibung des Apparates und der Theorie der Versuche die Ergebnisse der Messungen mitteilen, welche ich bisher zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten der atmosphärischen Luft ausgeführt habe. Die Arbeit wird daher aus folgenden Teilen bestehen:

I. Prinzip und mathematische Theorie der Methode;

II. Beschreibung des Apparates und des Beobachtungsverfahrens;

III. Die Resultate: Der Reibungskoeffizient der Luft.

I. Prinzip und mathematische Theorie der Methode.

Eine kupferne Kugelschale g wird auf einen Metalldraht so aufgehängt, daß in der Ruhelage die Verlängerung der Drahtachse durch den Mittelpunkt der Kugelschale geht (s. die Figur). Die Kugelschale wird mit einer fixen Hohlkugel G umgeben, deren Mittelpunkt mit dem der Schale g zusammenfällt. Die Kugelschale und der Raum zwischen der Kugelschale und der Hohlkugel wird mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt, die Kugelschale aus der Ruhelage durch eine Rotation um die Drahtachse abgelenkt: dann wird das aufgehängte System erfahrungsgemäß eine gedämpfte harmonische Bewegung ausführen, deren Differentialgleichung die folgende ist:

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - F\frac{d\vartheta}{dt} + \tau\vartheta = 0. \qquad (1)$$

K bedeutet hier das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, ϑ den Ablenkungswinkel desselben zur Zeit t (in der Ruhelage ist $\vartheta = 0$), $F\frac{d\vartheta}{dt}$ ist das dämpfende Moment sämtlicher Rei-

* Ein kurzer Auszug dieser Arbeit ist im Jahrgange 1901 sowohl des „*Mathematikai és Természettudományi Értesítő*" (ungarisch), als auch dieser Berichte (deutsch) erschienen.

bungskräfte, welches mit der Winkelgeschwindigkeit proportional angenommen wurde, $\tau\vartheta$ das Drehmoment der Torsionselastizität des Drahtes.

Das Dämpfungsverhältnis k (das Verhältnis einer Winkelamplitude zur folgenden) und die Schwingungsdauer T können experimentell bestimmt werden, woraus F berechnet werden kann; (1) kann nämlich auch so geschrieben werden:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\tau}{K}\vartheta = 0, \qquad (2)$$

wo jetzt

$$\beta = \frac{\text{lognat}\, k}{T} = \frac{\lambda}{T} \qquad (3)$$

das logarithmische Dekrement pro Zeiteinheit bedeutet. Aus (1) und (2) folgt daher

$$F = -2\beta K, \qquad (4)$$

wo β und K der Messung zugängliche Größen sind.

Würde F nur aus dem Dämpfungsmoment der Gasreibung auf der Kugelschale bestehen, dann wäre das Problem durch Bestimmung von k, T und K erledigt, denn F kann in diesem Falle durch Integration der Bewegungsgleichungen des Gases als eine Funktion des Reibungskoeffizienten η dargestellt werden, in welcher als Koeffizienten lauter experimentell meßbare Größen (die Dichte ϱ, k, T, die Dimensionen der Kugelschalen) auftreten. (4) wäre daher eine Gleichung, in welcher außer η lauter der Messung zugängliche Größen vorhanden sind, sodaß daraus η berechnet werden könnte.

F rührt jedoch nur teilweise von der Reibung des Gases auf der Kugelschale her; in F beteiligen sich außerdem die innere Reibung des Aufhängedrahtes, die Reibung der Luft auf den übrigen Teilen des schwingenden Systems (Spiegel, andere Nebenteile). Bezeichnen wir mit F_g den ausschließlich von der Gasreibung auf der Kugelschale herrührenden Teil von F, dann kann F so dargestellt werden:

$$F = F_g + F_e. \qquad (5)$$

Die Berechnung von F_e ist kaum durchführbar, weil F_e von lauter mathematisch nicht gut definierbaren Größen abhängt, wir werden daher F_e eliminieren.

Wir entfernen die Kugelschale vom schwingenden System und sorgen dafür, daß F_e ungeändert bleiben soll; dazu ist erforderlich, daß einerseits die Belastung des Drahtes, anderseits die Form und Dimensionen aller Teile außer der Kugelschale dieselbe sei wie vorher. Die Bewegungsgleichung dieses neuen Systems wird dann

$$K' \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - F_e \frac{d\vartheta}{dt} + \tau\vartheta = 0, \tag{6}$$

wo K' das Trägheitsmoment des neuen Systems bedeutet.

Haben k', λ', T', β' ähnliche Bedeutung für das neue System wie vorher k, λ usw. für das ursprüngliche, dann ist wiederum

$$F_e = -2\beta' K', \tag{7}$$

also aus (4), (5) und (7)

$$F_g = -2(\beta K - \beta' K'). \tag{I}$$

Diese ist nunmehr eine Gleichung, in welcher außer η nur experimentell bestimmbare Größen auftreten, woraus also η berechnet werden kann, falls F_g auf Grund der Bewegungsgleichungen als Funktion von η dargestellt wird.

Die Bewegungsgleichungen sind für das Innere und das Äußere der Kugelschale getrennt zu integrieren. Setzen wir voraus — wie das bei der Behandlung solcher Erscheinungen gebräuchlich ist —, daß die unmittelbar die Kugelschale berührende Gasschicht dieselbe Bewegung ausführt wie die Kugelschale selbst (daß also keine Gleitung vorhanden ist), dann liefert die Bewegung der Kugelschale selbst die Randbedingungen zur Integration der hydrodynamischen Gleichungen. Die Voraussetzung der verschwindenden Gleitung ist insbesondere nach den sorgfältigen Untersuchungen von KUNDT und WARBURG* für nicht allzukleine Drucke berechtigt.

Bei der Integration der Bewegungsgleichungen schließe ich mich den klassischen Beispielen von MAXWELL**, STOKES*** und insbesondere HELMHOLTZ† an.

* Berlin, *Akad. Monatsberichte* 1875, p. 160; *Pogg. Ann.* Bd. 155, p. 337 u. 525.

** *Scient. Papers* II, p. 1.

*** Cambridge, *Phil. Trans.* Bd. 8; London, *Phil. Trans.* Bd. 177.

† *Wissenschaftliche Abhandlungen* I, p. 172.

Unser Problem kann analytisch so formuliert werden:

Es sind die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, die Dichte ϱ und der Druck p als Funktionen des Ortes x, y, z und der Zeit t so zu bestimmen, daß folgende Gleichungen und Randbedingungen erfüllt sein sollen.

Sowohl im Innern als auch außerhalb der Kugelschale die auf Reibung korrigierten hydrodynamischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \frac{du}{dt} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left\{ \nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}^* \\
\varrho \frac{dv}{dt} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left\{ \nabla^2 v + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\
\varrho \frac{dw}{dt} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left\{ \nabla^2 w + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\
0 &= \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
p &= \varphi(\varrho, \Theta)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

X, Y, Z sind hier gegebene, auf die Volumeneinheit im Punkte x, y, z zur Zeit t wirkende äußere Kräfte, der Reibungskoeffizient η ist im allgemeinen von p und von der Temperatur Θ des Gases abhängig; die letzte Gleichung in (II) ist die Zustandsgleichung des Gases.

Die Randbedingungen sind, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten in dem Mittelpunkt der Kugelschale gelegt und die z-Achse senkrecht nach oben gerichtet wird, die folgenden:

a) Für den inneren Raum, wenn der innere Radius der Kugelschale mit r_1 bezeichnet wird, besteht die einzige Bedingung:

Ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2,$$

dann ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\psi = -\frac{u}{y} = \frac{u}{x} = De^{-\beta t} \cos \omega t = \Psi. \qquad \text{(IIa)}$$

Ψ ist die experimentell beobachtbare Winkelgeschwindigkeit der Kugelschale.

---

* $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$.

b) Für den äußeren Raum, wenn r_2 den äußeren Radius der Kugelschale, R den Radius der Hohlkugel bedeutet, bestehen zwei Bedingungen:

Ist

$$\left.\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=r_2^2, \quad \text{so ist} \quad \psi=\Psi \\ \text{und ist} \quad &x^2+y^2+z^2=R^2, \quad \text{so ist} \quad \psi=0. \end{aligned}\right\} \tag{IIb}$$

Mit Rücksicht auf die vorhandene Versuchsanordnung erfährt das System (II) noch beträchtliche Vereinfachungen.

Durch geeignete Wahl des Aufhängedrahtes und der Dimensionen des schwingenden Systems können wir erreichen, daß die Schwingungen so langsam vor sich gehen, daß die Glieder zweiten Grades in u, v, w und in den Deformationsgeschwindigkeiten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots$ im Vergleich zu den Gliedern ersten Grades vernachlässigt werden können. Daraus folgt:

I. Das Zeichen $\frac{d}{dt}$ kann durch das Zeichen $\frac{\partial}{\partial t}$ ersetzt werden.

II. Die Reibungswärme — eine quadratische Form der Deformationsgeschwindigkeiten — kann vernachlässigt werden: wenn also das Gas anfänglich gleichmäßiger Temperatur war, bleibt dieser Zustand auch während der Bewegung der Kugelschale unverändert, falls äußere Einwirkungen ausgeschlossen sind. η wird also eine Funktion von p allein bleiben (wie bekannt ist η von p unabhängig).

Mit Rücksicht darauf, daß im Gase sich ein Rotationskörper um seine Rotationsachse bewegt, und daß der hydrostatische Druck p von den Komponenten der inneren Reibung unabhängig ist, können wir annehmen, daß p in jeder horizontalen Ebene konstant ist, also

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

War das Gas anfänglich in Ruhe, dann wird die Rotation der Kugelschale keine senkrechte Geschwindigkeit im Gase zustande bringen, es wird also überall

$$w=0,$$

ebenso bleibt die Dichte im Gase zeitlich unverändert und in

horizontalen Ebenen konstant, also

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Von äußeren Kräften ist die Schwere allein vorhanden ($X = Y = 0$, $Z = -g$); die dritte Gleichung im System (II) gibt also mit Rücksicht auf die erwähnten Vereinfachungen die Änderung der Dichte mit der Höhe z; dieselbe ist jedoch mit Rücksicht auf die kleinen Dimensionen des Apparates ($R = 6$ cm) zu vernachlässigen, sodaß p, ϱ, folglich auch η, im ganzen Gase als konstant angenommen werden können.

Das System (II) geht also in folgendes über

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} &= \eta \nabla^2 u \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} &= \eta \nabla^2 v \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II*)}$$

Mit Rücksicht auf die Form der Randbedingungen versuchen wir die Bewegung des Gases so darzustellen, daß jede mit der Kugelschale konzentrische kugelförmige Gasschicht als je ein starrer Körper eine gedämpfte harmonische Bewegung der gleichen Schwingungsdauer und logarithmischen Dekrementes wie die Kugelschale selbst ausführt, die Winkelgeschwindigkeit aber, mit welcher diese Gasschichten die Gleichgewichtslage passieren, eine Funktion des Radius r der Gasschicht allein ist. Wir suchen daher eine Lösung des Systems (II*) und der Randbedingungen (IIa) und (IIb) folgender Form für die Winkelgeschwindigkeit

$$\psi = \varphi(r)\, e^{-\beta t} \cos \omega t. \qquad (8)$$

Führen wir in (II*) an Stelle von u, v die Winkelgeschwindigkeit ψ ein, so wird die dritte Gleichung (II*) durch die Annahme, daß ψ nur von r und t abhängt, identisch befriedigt, und die beiden ersten Gleichungen gehen in folgende Gleichung für ψ über, in welcher x, y, z nur in der Kombination r auftreten:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\eta}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0. \qquad (9)$$

Setzen wir voraus, daß ψ die Form (8) besitzt, so erhalten wir für φ folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\beta\varphi + \frac{\eta}{\varrho}\left(\frac{4}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2}\right) = 0. \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist nach HELMHOLTZ*

$$\varphi = A\left(\frac{im}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)e^{imr} + B\left(\frac{im}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)e^{-imr}, \tag{11}$$

wo $i = \sqrt{-1}$, $m = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{1}{2}}}$, und A, B im allgemeinen komplexe Konstanten bedeuten. Der reelle und der imaginäre Teil von φ befriedigen jeder für sich allein die Gleichung (10): die allgemeine reelle Form von φ ist:

$$\varphi = \frac{1}{r^3}(A_1[\cos mr + mr \sin mr] + B_1[mr \cos mr - \sin mr]). \tag{12}$$

A_1 und A_2 sind hier reelle Konstanten, welche mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden müssen. (Die Berücksichtigung des imaginären Teiles führt auf dasselbe Resultat.)

Bei dieser Bestimmung sind nunmehr die Raumteile innerhalb und außerhalb der Kugelschale getrennt zu behandeln:

Für den inneren Raumteil besitzen wir jedoch nur eine Randbedingung; als zweite wählen wir die Bedingung, daß für $r = 0$ φ nicht unendlich groß werden soll; diese zwei Bedingungen liefern für ψ die Form

$$\psi = \frac{r_1^3(mr\cos mr - \sin mr)}{r^3(mr_1\cos mr_1 - \sin mr_1)} De^{-\beta t}\cos\omega t. \tag{13}$$

Für den äußeren Raumteil liefern die Randbedingungen (IIb):

$$\psi = \frac{r_2^3\{m(R-r)\cos m(R-r) - (m^2Rr^2+1)\sin m(R-r)\}}{r^3\{m(R-r_2)\cos m(R-r_2) - (m^2Rr_2^2+1)\sin m(R-r_2)\}} De^{-\beta t}\cos\omega t.$$

Damit ist die Verteilung der Geschwindigkeit im Gase vollkommen gegeben, und wir können das Drehmoment der Gasreibung auf der Kugelschale berechnen.

Es seien $\Xi_s df$, $H_s df$, $Z_s df$ die rechtwinkeligen Komponenten der Kraft, welche das Gas auf ein Flächenelement df ausübt.

* L. c.

dessen nach dem Innern des Gases gerichtete Normale durch s bezeichnet ist. Dann ist das gesuchte Drehmoment um die z-Achse

$$\Phi = \int_1 (x_1 \mathsf{H}_{s_1} - y_1 \Xi_{s_1})\, df_1 + \int_2 (x_2 \mathsf{H}_{s_2} - y_2 \Xi_{s_2})\, df_2. \qquad (15)$$

Die Größen mit dem Index 1 beziehen sich auf die innere, die Größen mit dem Index 2 auf die äußere Fläche der Kugelschale.

Sind λ, μ, ν die Richtungskosinus von s und

$$A_x, B_y, C_z, \; B_z = C_y, \; C_x = A_z, \; A_y = B_x$$

die Komponenten der inneren Reibung des Gases, dann ist

$$\begin{aligned} -\Xi_s &= A_x\lambda + A_y\mu + A_z\nu \\ -\mathsf{H}_s &= B_x\lambda + B_y\mu + B_z\nu \\ -Z_s &= C_x\lambda + C_y\mu + C_z\nu. \end{aligned} \qquad (16)$$

Die Komponenten der inneren Reibung sind folgende Funktionen der Deformationsgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} -A_x &= 2\eta \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\ -B_y &= 2\eta \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\ -C_z &= 2\eta \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \qquad (17)$$

$$-B_z = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \; -C_x = \eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \; -A_y = \eta\left(\frac{\partial u}{dy} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

u, v, w sind bekannt, es kann daher Φ auf grund der Formeln (15), (16) und (17) berechnet werden; es wird

$$-\Phi = \frac{8}{3}\pi\eta \left\{ r_1^4 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_1 - r_2^4 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_2 \right\}. \qquad (18)$$

Es sei andererseits

$$\Phi = F_g \frac{d\vartheta}{dt} = F_g D e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

Wenn man nun in (18) die Ausdrücke (13) und (14) für ψ einsetzt, dann erhält man

$$-\tfrac{1}{2} F_g = \beta K - \beta' K' = \tfrac{4}{3}\pi\eta \left\{ m^2 r_1^5 \frac{\sin m r_1}{\sin m r_1 - m r_1 \cos m r_1} - 3 r_1^3 \right.$$

$$\left. - m^2 r_2^5 \frac{m R \cos m(R - r_2) - \sin m(R - r_2)}{m(R - r_2)\cos m(R - r_2) - (m^2 R r_2^2 + 1)\sin m(R - r_2)} + 3 r_2^3 \right\}. \qquad \text{(III)}$$

Diese ist eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von η. Die Lösung kann durch sukzessive Approximation geschehen, ähnlich wie diejenige der algebraischen Gleichungen z. B. nach der HORNERschen Methode. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung in der Form:

$$\eta = \frac{\frac{3}{4\pi}(\beta K - \beta' K')}{r_1^5 \frac{m^2}{1 - m r_1 \operatorname{cotg} m r_1} + r_2^5 \frac{m^3 R - m^2 \operatorname{tang} m(R - r_2)}{(m^2 R r_2^2 + 1)\operatorname{tang} m(R - r_2) - m(R - r_2)} + 3(r_2^3 - r_1^3)} \quad \text{(III*)}$$

Bei den gegenwärtigen Versuchen war

$$\varrho < 0{,}0015, \quad \eta > 0{,}00015, \quad \beta < 0{,}0005$$

(alles in c. g. s.), sodaß

$$m = \left(\frac{\varrho\beta}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} < 0{,}08.$$

Wir erhalten also aus (III*) für η einen ersten angenäherten Wert, wenn wir auf der rechten Seite der Gleichung $m = 0$ setzen; durch Anwendung der Regel von L'HÔPITAL erhält man:

$$\left(\frac{m^2}{1 - m r_1 \operatorname{cotg} m r_1}\right)_{m=0} = \frac{3}{r_1^2}$$

$$\left(\frac{m^3 R - m^2 \operatorname{tang} m(R - r_2)}{(m^2 R r_2^2 + 1)\operatorname{tang} m(R - r_2) - m(R - r_2)}\right)_{m=0} = 0.$$

Das bedeutet, daß in erster Annäherung die Wirkung der Gasreibung auf die innere Fläche der Kugelschale vernachlässigt werden kann, und man erhält zuerst

$$\eta_1 = \frac{\beta K - \beta' K'}{4\pi r_2^3}. \quad (20)$$

Diesen Wert von η setzen wir in der rechten Seite von (III*) ein und erhalten daraus einen genaueren η, welchen wir in (III*) wieder rechts einsetzen können usw. bis der rechts in (III*) eingesetzte Wert von η innerhalb der Versuchsfehlergrenzen mit dem berechneten η übereinstimmt.

Viel bequemer ist jedoch die graphische Methode, welche auch schneller zum Ziele führt:

Wir führen in (III*) m an Stelle von η als Unbekannte ein, dann kann diese Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$\frac{3(\beta K-\beta' K')}{4\pi\varrho\beta}=\frac{r_1^5}{1-mr_1\operatorname{cotg} mr_1}+r_2^5\frac{mR-\operatorname{tang} m(R-r_2)}{(m^2Rr_2^2+1)\operatorname{tang} m(R-r_2)-mR-r_2)}+\frac{3}{m}(r_2^3-r_1^3). \qquad (III^{**})$$

Die linke Seite dieser Gleichung sei mit N_1, die rechte mit $N_2(m)$ bezeichnet, dann kann die Funktion $N=N_2(m)$ durch eine Kurve in der Nm-Ebene dargestellt werden, welche auf Grund einiger ausgerechneten Punkte aufgezeichnet werden kann; der Schnittpunkt dieser Kurve mit der zur m-Achse parallelen Geraden $N=N_1$ liefert den gesuchten Wert von m resp. η.

Bemerkenswert ist hierbei, daß die Kurve $N=N_2(m)$ ausschließlich von den Dimensionen des Apparates abhängig ist, sodaß bei allen mit demselben Apparat ausgeführten Messungen dieselbe, ein für allemal aufgezeichnete, Kurve benützt werden kann; die Berechnung von N_1 geschieht auf Grund der beobachteten Werte von β, β', ϱ.

Die Auswertung der gegenwertigen Versuche geschah ebenfalls auf Grund dieser graphischen Methode.

II. Beschreibung des Apparates und des Beobachtungsverfahrens.

Der Apparat wurde in der Werkstätte für Präzisionsmechanik von Süss in Budapest hergestellt.

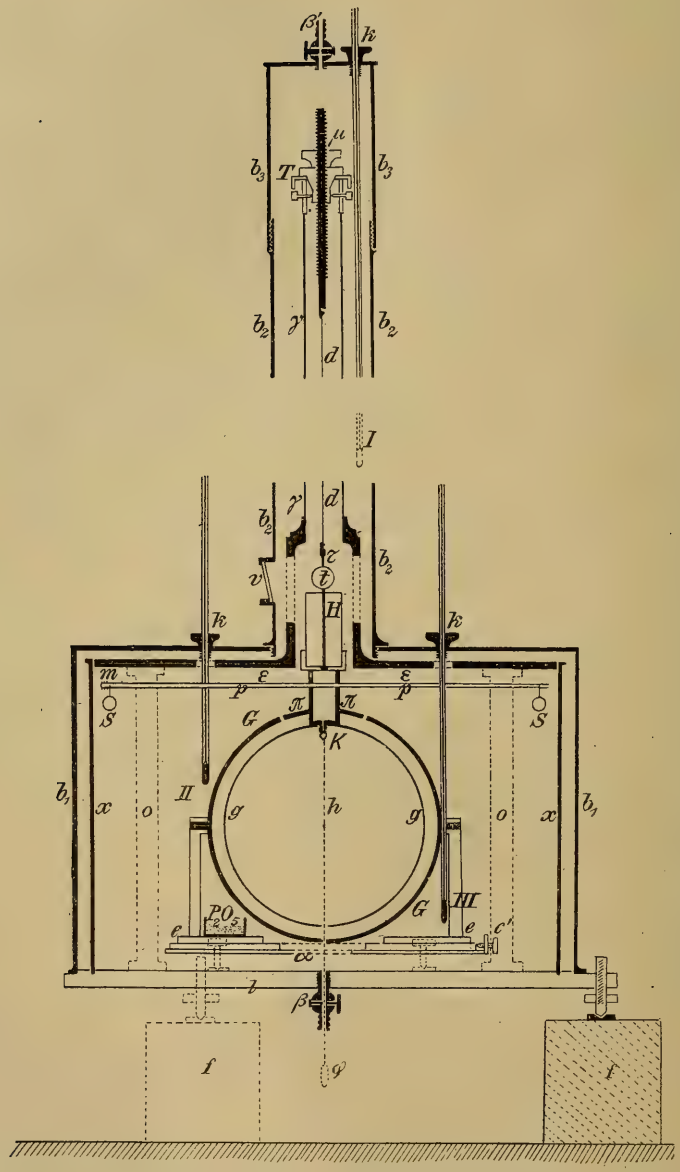
Sein essentieller Teil ist die Kugelschale g; bei der Berechnung der Versuche wird nämlich diese als mathematisch genaue Kugelschale behandelt, es muß daher dafür gesorgt werden, daß diese Voraussetzung auch nach Möglichkeit erfüllt sei. Eben deshalb konnte dieselbe nicht aus zwei auf einer Drehbank hergestellten Halbkugelschalen zusammengelötet werden. Entsprechend dem Ratschlage des Herrn M. Th. Edelmann, Physiker und Mechaniker in München, dem ich dafür auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen will, habe ich die Kugelschale mit folgendem Verfahren hergestellt:

Ich ließ aus hartem Paraffin auf einer Drehbank eine Kugel von einem Halbmesser von etwa 5 cm verfertigen. Das war der schwierigste Teil der Arbeit, denn die Paraffinkugel bildete das Modell der Kugelschale. Ich habe dieselbe mit einem Katheto-

meter geprüft: die größte Abweichung zwischen den gemessenen Durchmessern übertraf nicht 0,04 mm, was als ein sehr befriedigendes Resultat bezeichnet werden kann. Ich habe die Paraffinkugel mit feinem Bronzepulver überzogen und dieselbe samt einer mit ihr möglichst konzentrischen kupfernen Kugelschale von etwa 20 cm Durchmesser in eine wässerige Lösung von Kupfersulfat eingesenkt und die Oberfläche der Paraffinkugel mit einer etwa 1,5 mm starken Kupferschicht auf elektrolytischem Wege überdeckt. Die Stromdichte betrug auf der Kathode 0,4 bis 0,5 Ampère pro dm^2, und die Elektrolyse dauerte etwa eine Woche. Der Kupferniederschlag bildete eine homogene, kompakte Masse, so daß ihre äußere Oberfläche ebenfalls genau kugelförmig abgedreht werden konnte. Um die beiden Endpunkte eines Durchmessers der so erhaltenen Kugelschale wurden nun zwei kreisrunde Öffnungen mit einem Halbmesser von etwa 1,5 cm ausgeschnitten und die Kugelschale etwas erwärmt, sodaß das geschmolzene Paraffin durch die beiden Öffnungen herausfloß und es blieb so die kupferne Kugelschale allein übrig, dessen äußere Fläche denselben Grad der Genauigkeit zeigte, wie die innere Fläche resp. die Kugel aus Paraffin. Die beiden Öffnungen wurden durch zwei entsprechende Deckel geschlossen; der eine derselben trug in seiner Mitte eine Schraubenmutter, der andere eine 1,5 mm weite kreisrunde Öffnung. Die Schraubenmutter, deren Achse mit einem Durchmesser der Kugel zusammenfiel, diente zur Aufhängung der Kugelschale, während die ihr diametral genau gegenüberliegende kreisrunde Öffnungen bei der genauen Einstellung des schwingenden Systems benutzt wurde.

Die Herstellung der übrigen Teile des Apparates, dessen Querschnitt auf der Figur dargestellt ist, war nunmehr mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden.

Die fixe Hohlkugel G bestand aus zwei Halbkugelschalen, welche auf kleinen Schlitten zusammengeschoben und mit Schrauben genau eingestellt werden konnten. Die Kugelschale G mußte schon bei weitem nicht so genau sein wie die schwingende Schale, denn der Einfluß der Stärke der Gasschicht zwischen beiden Schalen auf die Gasreibung ändert sich nur sehr langsam, wenn diese Stärke eine ganz gewisse Grenze übertrifft. Ich


β'
k
μ
b3
T
b3
b2
γ
b2
d
I
γ
d
b2
τ
b2
v
t
H
k
k
m
ε
ε
p
p
S
S
π
π
G
K
b1
x
o
II
g
h
g
o
x
b1
G
III
P2O5
e
e
c'
α
l
β
f
φ
f

habe auf Grund der bisherigen Werte von η das entsprechende Dämpfungsverhältnis für $r_2 = 5$ cm, $R - r_2 = 0{,}5$ cm und $R - r_2 = 1{,}0$ cm berechnet; wurde die Gasschicht zwischen beiden Schalen mit 0,5 cm geändert, so verursachte dies im Dekrement bloß eine Änderung von $\frac{1}{100}$. Bei den gegenwärtigen Versuchen war $R - r_2$ zirka 1 cm, sodaß die kleineren Unregelmäßigkeiten der äußeren Kugel keine wahrnehmbaren Fehler verursachen konnten.

Besondere Sorgfalt mußte der Elimination der Reibungskräfte (F_e) gewidmet werden, die nicht direkt berechnet werden konnten. Wie früher erwähnt wurde, habe ich zu diesem Zwecke zuerst die Schwingungen der Kugelschale beobachtet und dann diejenigen eines zweiten Systems, welches nach Entfernung der Kugelschale zurückblieb; in beiden Systemen mußte aber die Belastung des Drahtes und die Form und Größe aller Teile außer der Kugelschale dieselbe sein. Ich habe deshalb zwei kongruente Zylinder aus Aluminium und aus Blei herstellen lassen, sodaß der Unterschied ihrer Gewichte dem Gewichte der Kugelschale gleich war. Als ich die Schwingungen der Kugelschale beobachtete, war der Aluminiumzylinder über dieselbe so befestigt, daß seine Achse mit der Rotationsachse des Systems übereinstimmte; nachher habe ich die Kugelschale entfernt, den Aluminiumzylinder mit dem Bleizylinder vertauscht und die Schwingungen dieses Systems beobachtet. Dadurch wurde in der Tat erreicht, daß das dämpfende Moment aller Teile außer der Kugelschale in beiden Systemen dasselbe war.

Im zweiten Falle hätte ich aber mit dem Bleizylinder allein eine allzu kleine Schwingungsdauer erhalten, was die Genauigkeit der Beobachtungen vermindert hätte. Ich habe deshalb das Trägheitsmoment beider Systeme vergrößert, indem ich zwischen die Zylinder und die Kugelschale ein horizontales Kreuz aus Messingstäben befestigte, auf welchem kleine Messinggewichte (s) verschiebbar befestigt waren. Auf den Stäben war eine Millimeterteilung angebracht, sodaß die Entfernung der Gewichte von der Rotationsachse abgelesen werden konnte. Dadurch konnte auch die Bestimmung der Trägheitsmomente leicht durchgeführt werden.

Die Zusammenstellung des Apparates geschah nun folgendermaßen:

Das Skelett des Apparates war eine 1 cm dicke Kreisscheibe (l) aus Messing mit einem Durchmesser von 40 cm, in welchen vier 20 cm hohe Säulen (O) aus Messing eingeschraubt waren, die den runden Tisch ε trugen. In der Mitte des Tisches befand sich eine kreisrunde Öffnung, über diese ragte die kupferne Röhre γ hervor, welche auf ihrem Ende in einem Abstand von 60 cm vom Tische ε den Torsionskopf T trug.

Der Apparat wurde in einem trockenen Keller des physikalischen Instituts der Budapester Universität aufgestellt und zwar auf drei Holzwürfel (f) auf einem in die Hauptwand des Instituts gelagerten Tische. Ich habe sodann die Scheibe l horizontal eingestellt, nachdem ich die mit einem Hahn versehene Röhre β ausgeschraubt habe. Jetzt habe ich den Draht d eingehängt und die Achse τ darauf befestigt, welche den Spiegel t, den Aluminiumzylinder H, das Kreuz p, die Kugelzone π und die Schraube $\varkappa$ trug, welche in einem Haken endete. Nun zog ich durch die Kugelschale g einen doppelten Haarfaden h, an dessen Ende das Lot φ hing, und habe das andere Ende des doppelten Haarfadens in den Haken $\varkappa$ eingehängt und die Kugelschale auf die Schraube $\varkappa$ aufgeschraubt. Ich habe nun die Gewichte s auf dem Kreuze so verschoben, daß der Haarfaden h genau durch den Mittelpunkt der kleinen kreisrunden Öffnung der Kugelschale hindurchging. Dadurch habe ich erreicht, daß die Rotationsachse des Systems ein Durchmesser der Kugelschale war. Ich habe zwei solche Lagen der Gewichte bestimmt und die Entfernungen von der Rotationsachse abgelesen: in einer Lage waren alle Gewichte nahe an den Enden der Stäbe, in der anderen Lage möglichst nahe an der Rotationsachse. Die Bestimmung zweier solcher Lagen war zur Messung der Trägheitsmomente notwendig.

Einer der Stäbe trug auf seinem Ende einige Windungen aus dünnem weichen Eisendraht; diese kleine Spule m wurde dazu benutzt, den Apparat in Bewegung zu setzen.

Nach Entfernung des Haarfadens h habe ich auf den Schlitten e, welche am Tischchen α glitten, die beiden halben Hohlkugelschalen G so aneinander geschoben, daß sie eine geschlossene Kugel bildeten, wovon durch eine horizontale Ebene eine Kalotte abgeschnitten war. Die Kugelzone π war auf der Achse τ so

befestigt, daß sie bei konzentrischer Einstellung der Kugelschale G und der Kugelschale g genau die Fortsetzung der fixen Kugelschale bildete. Ich habe daher einerseits durch geeignete Drehung der Schraube μ am Torsionskopfe erreicht, daß das schwingende System der Höhe nach entsprechend eingestellt war, andererseits durch Verschiebung der Schlitten c erreicht, daß der ringförmige Zwischenraum zwischen der Kugelschale G und der Kugelzone π überall gleich breit war. Bei genauer Einstellung war dieser Zwischenraum etwa 1 mm breit, sodaß diese Einstellung mit Hilfe der Schrauben c' mit befriedigender Genauigkeit erreicht werden konnte. In dieser Weise konnte ich erreichen, daß die Mittelpunkte der fixen und der schwingenden Kugelschale zusammenfielen.

Nun stellte ich auf einen der Schlitten c eine Schale mit P_2O_5 und bedeckte den unteren Teil des Apparates mit dem Cylinder x aus 1,5 mm starkem Messingblech. Nachher wurde der ganze Apparat in die aus drei Stücken b_1, b_2, b_3 bestehende Messinghülle eingeschlossen, welche mit dem zur Spiegelablesung dienenden Fenster v versehen war. Der untere Teil (b_1) war in den Rand der Scheibe l eingeschliffen; derselbe wurde gut eingefettet und so der Teil b_1 darauf gelegt. In den Teil b_1 wurde dann die Röhre b_2 eingeschraubt, welche die Röhre γ umgab und das Fenster v trug. Auf die Röhre b_2 wurde endlich das Endstück b_3 aufgeschraubt, welches mit dem Röhrchen β' samt Hahn versehen war. Sämtliche Schraubenwindungen wurden gut eingefettet.

Endlich wurde auch das Röhrchen β in die Scheibe l eingeschraubt und die Thermometer I, II und III eingesetzt. Für diese trugen die Messinghülle b und der Tisch ε entsprechende Einschnitte; die Thermometer waren in messingene Schrauben k eingefaßt, welche luftdicht in die Messinghülle eingeschraubt werden konnten. Die Kugeln der Thermometer ragten tief in das Innere des Apparates hinein; der Quecksilberfaden und die Graduierung lagen jedoch außerhalb, sodaß die Ablesungen ohne Schwierigkeit geschehen konnten. Die Thermometer II und III zeigten die Temperatur des Gases möglichst nahe an der Kugelschale und zwar II diejenige der oberen, III diejenige der unteren Gas-

schichten. Die Kugel des Thermometers I ragte bis ungefähr zur Mitte des Aufhängedrahtes in die Hülle b_2 hinein und konnte so insbesondere von der Änderung der Temperatur des Drahtes Rechenschaft geben.

Der so zusammengestellte Apparat konnte nun mit Hilfe der Hähne β und β' mit einem beliebigen Gase gefüllt werden. Die Messinghülle war noch bei Druckunterschieden von 5—6 cm Quecksilber sehr genau luftdicht, konnte aber selbstverständlich größere Druckunterschiede nicht vertragen. Mein Zweck war aber ohnehin nicht etwa die Änderung des Reibungskoeffizienten mit der Änderung des Druckes zu beobachten, denn solche relative Messungen können nach anderen Methoden einfacher ausgeführt werden. Vielmehr war ich bestrebt, den absoluten Wert von η für einen bekannten Zustand des Gases möglichst einwandfrei zu bestimmen.

Meine bisherigen Messungen beziehen sich auf getrocknete atmosphärische Luft bei Zimmertemperatur und normalem Drucke.

Ich habe den Hahn β mit mehreren mit $CaCl_2$ und nassem NaOH gefüllten U-Röhren verbunden, welche mit der freien Luft des Gartens des physikalischen Instituts kommunizierten; dazwischen wurden mehrere Wattepfropfen eingeschaltet, damit kein Staub in den Apparat eindringen sollte. Den Hahn β habe ich mit einem Quecksilberbarometer und mit einer Wasserstrahlpumpe mittels einer mit $CaCl_2$ gefüllten Röhre verbunden.

Die Luft wurde so mit einer Druckdifferenz von etwa 5 bis 6 cm an beiden Enden der Leitung durch den Apparat gesogen. Das NaHO entfernte davon die Kohlensäure, das $CaCl_2$ den Wasserdampf; so kam die Luft in den Apparat hinein, wo noch die letzten Reste von Wasserdampf durch das P_2O_5 absorbiert wurden. Damit die Luft in allen Teilen des ziemlich labyrinthartig gebauten Apparates eindringen kann, habe ich dafür gesorgt, überall die nötige Anzahl von Ventilationslöchern anbringen zu lassen, insbesondere wurde die Schraube $\varkappa$ und die untere Fassung des horizontalen Kreuzes durchgebohrt.

Der Apparat wurde so vor jedem Versuche zirka 24 Stunden lang mit reiner getrockneter Luft durchgespült; alsdann wurden die Hähne geschlossen und nachdem die Thermometer das Ein-

treten des Temperaturgleichgewichtes versichert hatten, wurde das schwingende System durch Vermittelung der kleinen Eisenspule m mit einem Magnete abgelenkt und als die Amplituden klein genug geworden waren, die Schwingungsdauer und das Dekrement der Amplituden beobachtet.

Sämtliche Beobachtungen (auch die Ablesung der Thermometer) wurden mittels Fernrohre, die 3—4 m weit vom Apparat aufgestellt waren, ausgeführt. Die Temperatur wurde unmittelbar vor der Beobachtung des ersten und nach derjenigen des letzten Umkehrpunktes auf allen Thermometern abgelesen.

Ich habe die Beobachtungen gewöhnlich sofort begonnen sobald die Umkehrpunkte innerhalb der Skala lagen; aus den ersten drei wurde die Gleichgewichtslage des Systems bestimmt und auf der Skala bezeichnet; sodann wurden 40 Koinzidenzen der Gleichgewichtslage mit dem Fadenkreuze beobachtet und alle dazwischen liegenden Umkehrpunkte abgelesen. Dann wurden die Ausschläge auf die entsprechenden Bogen reduziert und λ und T berechnet.

III. Die Resultate; der Reibungskoeffizient der Luft.

Die Elimination des der Rechnung schwerlich zugänglichen Dämpfungsmomentes F_c gründet sich auf die Annahme, daß dieses Dämpfungsmoment im Laufe der Messungen ungeändert bleibt. Es mußte daher ganz besonders dafür gesorgt werden, daß die innere Reibung des Drahtes, welche den größten Teil von F_c liefert, während der Versuche keine Änderung erfährt.

Anderseits mußte ich den Draht so auswählen, daß seine Tragfähigkeit möglichst groß und seine Torsionselastizität möglichst klein ausfallen soll, um möglichst große Schwingungsdauer zu erhalten.

Ein Nickeldraht entsprach sehr gut der zweiten Forderung, und ich habe daher meine Messungen anfangs mit monatelang austordiertem, $\frac{1}{20}$ mm dickem Nickeldraht durchgeführt, mit welchem ich je nach den verschiedenen schwingenden Systemen verschiedene Schwingungsdauern erhalten habe, die zwischen 111 und 74 sec. variierten. Die Torsionselastizität des Drahtes erwies sich ebenfalls als sehr genau konstant, die innere Reibung desselben

war jedoch bedeutenden Schwankungen unterworfen; das natürliche logarithmische Dekrement λ zeigte bei derselben Anordnung nach wiederholten Messungen Änderungen bis zu 10—15 %. Nun ist aber η (siehe die Annäherungsformel 20) in erster Annäherung eine lineare Funktion solcher λ's, sodaß eine genaue Bestimmung von η bei Benutzung dieses Drahtes unmöglich war.

Bei Stahldrähten fand ich noch größere Schwankungen.

Ich mußte mich daher mit kleineren Schwingungsdauern begnügen und einen $\frac{1}{10}$ mm dicken Platindraht benutzen. Anfangs erreichte ich auch hier nicht das gewünschte Resultat, später gelang es jedoch durch geeignete Behandlung des Drahtes, vor den Messungen ein ziemlich konstantes Dekrement zu erhalten.

Die innere Reibung (elastische Nachwirkung) des Drahtes ist nämlich in hohem Maaße von der „Vorgeschichte" desselben abhängig, darum war ich bestrebt, die Versuche so einzurichten, daß diese Vorgeschichte wenigstens eine gewisse Zeit unmittelbar vor den Messungen in allen Fällen dieselbe sein soll. Ich habe deshalb folgendes Verfahren angewandt, welches sich als zweckmäßig erwies:

Nachdem der Apparat mit getrockneter Luft gefüllt war, ließ ich denselben einen Tag lang ruhig liegen, sodann habe ich das schwingende System mit zirka 40° von der Gleichgewichtslage abgelenkt. Nach drei Stunden waren die Ausschläge schon ganz klein; dann wurde die Ablenkung mit möglichst demselben Winkel wiederholt, wieder drei Stunden lang gewartet und erst nach der dritten Ablenkung die Beobachtungen begonnen, sobald die Umkehrpunkte innerhalb der Skala lagen.

Für die Konstanthaltung der Temperatur brauchte nicht besonders gesorgt werden, denn der Apparat war in einem beständig verdunkelten Souterrain des physikalischen Instituts aufgestellt, wo die Temperatur sehr genau konstant war. Die vollständige Versuchsserie zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten für getrocknete Luft dauerte aber einen vollen Monat (vom 27. Aug. bis 29. Sept. 1904), sodaß inzwischen eine gewisse Änderung der Temperatur doch merkbar wurde. Dies verursachte jedoch keine Schwierigkeit, denn die Versuchsserie war so eingerichtet:

Es wurden beobachtet:

I. 6 Schwingungsserien (à 40 Koinzidenzen) als das System mit der Kugelschale und dem Aluminiumzylinder belastet war;

II. 6 Schwingungen, als die Kugelschale abgeschraubt und der Aluminiumzylinder mit einem Bleizylinder ersetzt war, endlich

III. wieder 6 Schwingungsserien bei der Anordnung I.

Die Mittelwerte der Resultate der Beobachtungen I und III wurden mit denjenigen der Beobachtungen II kombiniert, und so konnte die während der ganzen Dauer der Beobachtungen in demselben Sinne eingetretene Änderung der Temperatur eliminiert werden, und es war nicht notwendig, den Temperaturkoeffizienten besonders zu bestimmen.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Messungen; die Maximalfehler der beobachteten Größen sind überall hinzugefügt: jeder Wert von λ und T wurde nämlich aus 41 Umkehrpunkten resp. 40 Koinzidenzen abgeleitet:

A.

Nummer des Versuches	k		T (sec.)		t (Temperatur)		Verschiebung der Gleichgewichtslage in Skalenteilen
	Zahlenwert	Max.-Fehler	Zahlenwert	Max.-Fehler	Zahlenwert	Max.-Fehler	
I, 1	1,01075	0,00023	32,431	0,019	21,35	0,01	0,2
2	86	24	412	13	50	02	0,3
3	74	22	404	21	39	04	0,5
4	78	26	399	21	19	03	1,1
5	74	18	398	17	14	02	0,2
6	80	16	399	14	14	01	0,3
II, 1	1,01159	0,00014	28,441	0,034	20,61	0,10	0,5
2	60	16	439	29	59	01	0,2
3	72	19	437	13	34	02	0,2
4	57	22	435	15	32	08	0,1
5	55	23	433	17	50	04	0,8
6	65	21	436	14	60	04	0,9
III, 1	1,01071	0,00022	32,396	0,012	19,62	0,03	0,2
2	79	22	382	08	69	04	0,3
3	88	18	375	20	41	01	0,1
4	87	22	378	23	21	02	0,1
5	87	20	395	21	20	05	0,6
6	76	23	401	19	57	02	0,8

Der Skalenabstand betrug 330 cm (= 3300 Skalenteile); ein Skalenteil = 31,3″.

Das Dekrement der Amplituden zeigte — wie aus der Tabelle A ersichtlich ist — keine größeren Schwankungen als $\frac{1}{40}$ %, und die Schwingungsdauer konnte im ungünstigsten Falle bis auf $\frac{1}{10}$ % bestimmt werden; die größte Schwankung der Temperatur innerhalb derselben Schwingungsserie betrug 0,1° C, und die größte Verschiebung der Gleichgewichtslage 0,5 Skalenteile also zirka $\frac{1}{4}$ Minute.

Die folgende Tabelle enthält die Mittelwerte k, T, $\lambda = \text{lognat}\, k$, $\beta = \frac{\lambda}{T}$ berechnet aus allen Versuchen I, III, und k', T', λ', β' berechnet aus den Versuchen II; die Maximalfehler bedeuten in dieser Tabelle die größte Abweichung von den in Tabelle A aufgeschriebenen Mittelwerten.

B.

$k = 1{,}01080 \pm 0{,}00009$	$\lambda = 0{,}01074 \pm 0{,}00009$
$k' = 1{,}01161 \pm 0{,}00011$	$\lambda' = 0{,}01154 \pm 0{,}00011$
$T = 32{,}397 \pm 0{,}034$	$\beta = 0{,}0003316 \pm 0{,}0000028$
$T' = 28{,}437 \pm 0{,}004$	$\beta' = 0{,}0004059 \pm 0{,}0000039$

Die mittlere Temperatur betrug bei den Versuchen I $21{,}28° \pm 0{,}22°$ C., bei den Versuchen II $20{,}49° \pm 0{,}17°$, bei den Versuchen III $19{,}45° \pm 0{,}24°$; kombinieren wir die Versuche I mit den Versuchen III, so erhalten wir die mittlere Temperatur $20{,}37°$, sodaß der berechnete Wert von η sich auf 20,4° C. beziehen wird.

Es ist aus der Tabelle B ersichtlich, daß die relative Genauigkeit der Größen λ resp. β, welche in der Formel für η unmittelbar auftreten, schon bedeutend kleiner ist als die Genauigkeit von k selbst; k ist nämlich angenähert $= 1 + \lambda$, und λ ist ungefähr 0,01, sodaß, wenn k bis auf $\frac{1}{100}$ % genau ist, λ nur bis auf 1 % genau ausfallen wird; dieselbe wird die Genauigkeit von η selbst sein. (Siehe die Formel 20.)

Daraus geht wieder klar hervor, wie sehr es wünschenswert ist, mit großer Schwingungsdauer zu arbeiten: k, die unmittelbar gemessene Größe, ist bis auf $\frac{1}{100}$ % genau; das ist ungefähr die

Grenze der experimentell erreichbaren Genauigkeit; wäre λ größer, dann würde sich bei derselben Genauigkeit von k ein genauerer Wert von λ ergeben; λ ist aber das logarithmische Dekrement bei einer Schwingung, welches also mit der Schwingungsdauer direkt proportional ist, denn es ist β das Dekrement pro Zeiteinheit bei demselben Gase und bei demselben schwingenden System konstant. So war z. B. bei Anwendung des Nickeldrahtes $k = 1{,}038$ also λ mehr als dreimal so groß als bei dem Platindraht (die Schwingungsdauer ebenfalls), und so hätte η mit dreifacher Genauigkeit bestimmt werden können, falls die Schwankungen der inneren Reibung des Gases diese Versuche nicht vereitelt hätten.

Dadurch ist auch die Richtung gegeben, in welcher die Vervollkommnung dieser Methode durchgeführt werden muß: es muß ein Aufhängedraht von möglichst großer Tragfähigkeit, kleiner Torsionselastizität und konstanter innerer Reibung aufgesucht werden, dann kann die Genauigkeit der Messungen noch beträchtlich gesteigert werden.

Ich habe auf Grund der Zahlenwerte in der Tabelle β mit dem oben beschriebenen graphischen Verfahren den Wert von η bestimmt für getrocknete und von Kohlensäure gereinigte Luft bei der Temperatur 20,4° und atmosphärischem Druck.

Ich habe auf Millimeterpapier 5 Punkte der Kurve $N = N_2(m)$ konstruiert:

$$m = 0{,}045, \quad 0{,}046, \quad 0{,}047, \quad 0{,}048, \quad 0{,}049$$
$$N_2(m) = 234006 \quad 224003 \quad 214617 \quad 205700 \quad 197293$$

für

$$r_1 = 4{,}885, \quad r_2 = 5{,}007, \quad R = 6{,}084 \text{ cm}.$$

Die fünf konstruierten Punkte lagen sehr angenähert auf einer Geraden.

Auf dem Kreuze waren in Abständen

$$s_1 = 14{,}5, \quad s_2 = 14{,}5, \quad s_3 = 14{,}9, \quad s_4 = 12{,}5 \text{ cm}$$

von der Drehungsachse die Gewichte

$$m_1 = 9{,}892, \quad m_2 = 9{,}887, \quad m_3 = 9{,}921, \quad m_4 = 9{,}888 \text{ gr}$$

aufgehängt; bei dieser Anordnung waren die Trägheitsmomente

$$K = 18161, \quad K' = 13905 \text{ grcm}^2.$$

Ferner war

$$\varrho_{20,4} = 0{,}001202 \text{ grcm}^{-3}$$

$$\beta = 0{,}0003316 \text{ sec}^{-1}, \quad \beta' = 0{,}0004059 \text{ sec}^{-1}.$$

N_1 war $= 214782$ und aus dem Schnittpunkte der Linien N_1 und N_2 ergab sich genau

$$m = 0{,}046988$$

und

$$\eta = 0{,}0001794 \text{ cm gr}^{-1}\text{sec}^{-1} \text{ (Max.-Fehler 1 \%)}.$$

Meine nächste Aufgabe wird nun sein, eventuell mit Benutzung eines besser entsprechenden Aufhängedrahtes, die Änderung des Reibungskoeffizienten mit der Luftfeuchtigkeit zu bestimmen, wozu dieser Apparat besonders geeignet erscheint.

* * *

Zum Schluß sei mir gestattet meinen innigsten Dank auszusprechen einerseits der Math.-Naturw. Kommission der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, die mir durch materielle Unterstützung die Herstellung des kostspieligen Apparates ermöglichte, andererseits meinem Professor, dem Herrn ROLAND Baron v. EÖTVÖS, Direktor des physikalischen Instituts der Budapester Universität, der diese in seinem Institute durchgeführten Messungen immer mit dem größten Interesse begleitete.

10.

DATEN ZUR GENAUERN KENNTNIS DES SZEPES-GÖMÖRER ERZGEBIRGES.

Von FRANZ SCHAFARZIK korr. Mitglied.

(Antrittsvortrag aus der Sitzung am 20. Juni 1904.)

Der Gegenstand meines Vortrags bezieht sich auf dasjenige Gebiet unsers Vaterlandes, welches unter dem Namen des Szepes-Gömörer Erzgebirges bekannt ist. Wie schon die Benennung anzeigt, befindet sich viel Erz in diesem Gebirge und bildet die Urbeschäftigung seines Volkes der Bergbau. Die sich auf den Bergbau dieses Erzgebirges beziehenden Aufzeichnungen sind sehr alte und reichen noch bis in die Zeiten vor den Einfällen der Tartaren zurück. Die hauptsächlichsten Bergorte entwickelten sich während des XIII. und XIV. Jahrhunderts zu Bergstädten, die von den ungarischen Königen mit weit reichenden Privilegien belehnt wurden. Aus dieser Zeit sind uns sieben Bergstädte bekannt und zwar in der Reihenfolge ihres im Jahre 1487 neuerlich festgestellten Ranges: Gölniczbánya, Szomolnokbánya, Rudabánya, Jászó, Telkibánya, Rozsnyó und Igló*. Unter diesen liegt Telkibánya bereits außer dem Bereiche des eigentlichen Erzgebirges, nämlich im Eperjes-Tokajer-Gebirge, im östlichen Teile des Komitates Abauj.

In alter Zeit hatte man im Gebiete des Erzgebirges Silber, Kupfer und an einzelnen Orten auch Quecksilber gewonnen. Gölniczbánya z. B. wurde damals als Silberbergwerk angesehen,

* Wenzel, G., Magyarország bányászatának kritikai története [Kritische Geschichte des Bergbaues Ungarns] Budapest 1880, p. 75 u. ff.

und es wurden anläßlich des Zwistes, welcher zwischen König Ladislaus IV. und dem päpstlichen Nuntius entstanden war, aus dieser Grube jährlich 100 Mark Feinsilber verpfändet. Heute dagegen wird auf die Gewinnung des Silbers und des Quecksilbers bloß nur noch ein nebensächliches Gewicht gelegt, und es spielt auch das jährlich gewonnene Kupfer nur eine untergeordnete Rolle; die Kobalt- und Nickelproduktion von Dobsina ist sogar gänzlich eingegangen. Dagegen ist aber der Abbau des Eisenspates in den Vordergrund getreten, desjenigen Erzes, welches in früherer Zeit neben den Brauneisensteinen des sog. eisernen Hutes gar keiner Beachtung gewürdigt wurde.

Der einstige Erzreichtum Ober-Ungarns und besonders der Komitate Szepes und Gömör hat auch das Augenmerk des Auslandes in hohem Maße auf sich gelenkt. Es kamen der Reihe nach Edler v. Born (1774), Johann Jakob Ferber (1780), Jens Esmark (1793), Beudant (1818) und besuchten auf kürzern oder längern Reisen unser Vaterland, wobei keiner von ihnen versäumte, auch die berühmten Bergwerke der beiden genannten Komitate aufzusuchen. In ihren Aufzeichnungen legten sie hauptsächlich auf das Erzvorkommen, auf dessen Gewinnungsmethoden und andere Nebenumstände Gewicht, wohingegen sie das umschließende taube Gestein bloß flüchtig erwähnten und zumeist als Tonschiefer, Grauwackensandstein oder aber als Gneis bezeichneten.

Im Jahre 1860 aber hatte ein sehr hervorragender und besonders in montan-geologischer Hinsicht bahnbrechender Mann unser Land bereist und zwar der berühmte Professor an der Freiberger Bergakademie, Bernhard v. Cotta. Er besuchte Ober-Ungarn, ferner den nagybányaer Bergdistrikt und das siebenbürgische Erzgebirge, und auf diesem seinen Wege berührte er außer Selmeczbánya (Schemnitz) noch die Bergorte Úrvölgy Magurka, Dobsina, Alsó-Sajó und Szomolnok. In Dobsina bezeichnete er das Erzgänge führende Gestein als Ton- und Glimmerschiefer, das von Alsó-Sajó als talkigen Glimmerschiefer, dasjenge von Szomolnok hingegen als Ton- und teilweise Glimmerschiefer.

Später im Jahre 1868 befaßte sich im Auftrage der wiener kais. kgl. geologischen Reichsanstalt Dionysius Stur, ein hervor-

ragendes Mitglied dieser Anstalt, mit der geologischen Aufnahme des Szepes-Gömörer Erzgebirges. Über diese Kartierung erstattete derselbe eingehenden Bericht*, laut welchem das in Rede stehende Gebiet noch weit nach Westen über Rozsnyó hinaus vorwiegend aus Tonschiefern, aus phyllitischem Gneis und Karpathen-Gneis bestehe, die alle zu den kristallinischen Schiefern und zwar zu deren oberstem Teile zu rechnen wären.

Diese Ansicht akzeptierte auch Franz v. Hauer, sowohl auf der von ihm herausgegebenen geologischen Übersichtskarte und in den dieselbe begleitenden Erläuterungen**, als auch in seinem bekannten Handbuche der Geologie***, in welchem er das Szepes-Gömörer und teilweise Zólyomer Erzgebirge als oberungarisches Massiv bezeichnet.

Im Juni des Jahres 1902 hatte ich Gelegenheit infolge eines Spezialauftrages Sr. Exzellenz des königl. ungar. Finanzministers mich ungefähr einen Monat lang in der Gegend von Rozsnyó aufhalten zu können, und bei dieser Gelegenheit nahm ich bereits in den ersten Tagen wahr, daß die bis dahin für serizitische Gneise und Schiefer gehaltenen Gesteine keine solchen, sondern Porphyroide sind. Als ich nun in der Umgebung von Rozsnyó meine Untersuchungen weiter fortsetzte, entdeckte ich alsbald den Quarz-Porphyr-Stock bei Csúcsom, und so wurde es mir von Tag zu Tag klarer, daß wir es in diesem Teile des Szepes-Gömörer Erzgebirges anstatt mit kristallinischen Schiefern, mit einem riesigen Porphyrgebiete zu tun haben, dessen Spuren von Rima-Brezó bis Gölniczbánya und von Rozsnyó bis Dobsina nachzuweisen sind. Hiermit erblickte ich wie mit einem Schlage die bis dahin so rätselhafte Genesis der Erzgänge in einem ganz andern Lichte.

Doch mußte ich zugleich einsehen, daß es unmöglich sei,

* D. Stur, Bericht über die geologische Aufnahme der Umgebung von Schmölnitz und Göllnitz, *Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt*, Bd. 19, Wien 1869, p. 382—416.

** Franz Ritter v. Hauer, Geologische Übersichtskarte der österr.-ungarischen Monarchie 1 : 576000, Wien 1867—1871.

*** Franz Ritter v. Hauer, Die Geologie und ihre Anwendung auf die Bodenbeschaffenheit der österr.-ungar. Monarchie, Wien 1878.

meine Beobachtungen innerhalb einiger Tage, die mich noch von den mir bevorgestandenen Sommeraufnahmen trennten, genauer begründet vorzulegen, und deshalb entschloß ich mich behufs Wahrung der Priorität zur Veröffentlichung einer vorläufigen kleinen Mitteilung.*

Nachdem ich diese auf den ersten Blick monoton aussehenden Gesteine wiederholt untersucht habe und auch von einzelnen Vorkommen Analysen habe anfertigen lassen, bin ich nun in der Lage, bezüglich der von mir aufgesuchten Teile des Szepes-Gömörer Erzgebirges über folgende Gesteinstypen zu referieren.

Quarzporphyr.

Das Auftreten des typischen Quarzporphyrs ist bisher von allen dieses Gebiet begangenen Forschern gänzlich übersehen worden. Mir selbst gelang es jedoch dieses Gestein im obern csúcsomer Tale in einer Erstreckung von beinahe 2 km in Form von anstehenden Felsen aufzufinden; im Rozsnyó Tale dagegen fand ich im Bachgerölle ebenfalls typische Quarzporphyrstücke. Herrn Bergingenieur Eugen Reguly, der im folgenden Jahre von der königl.-ungar. geologischen Anstalt mit der systematischen Kartierung dieser Gegend betraut wurde, gelang es hierauf festzustellen, daß das csúcsomer Quarzporphyr-Vorkommen wenigstens an vier Quadratkilometer Ausdehnung besitzt, ebenso wie daß die Gerölle im Rozsnyó Bache ebenfalls von einem anstehenden Quarzporphyrgebiete herstammen. Dasselbe ist bedeutend kleiner, als das vorhin erwähnte und liegt im Zlatagraben, einem Nebenzweige des Rozsnyó Tales.

Mikroskopisch betrachtet sind die typischen Quarzporphyre von bräunlich-grauer Farbe, massiger Struktur, die aber infolge des Druckes mitunter zur schieferigen neigt. In ihrer dichten felsitischen Grundmasse erblickt man zahlreiche mittelgroße (1—2 mm), seltener größere (3—4 mm), uneben bis muschlig brechende, fettglänzende Quarzkörner von rauchgrauer Farbe.

* Franz Schafarzik, Vorläufige Mitteilung über das Auftreten von Quarzporphyren und Porphyroiden in den Komitaten Gömör und Szepes (Zips) in Nord-Ungarn, Földt-Közlöny, XXXII. Bd., Budapest 1902, p. 326—27.

Spärlicher entdecken wir in derselben auch einzelne Orthoklaskörner, die zufolge ihrer Spaltbarkeit leicht zu erkennen sind. Farbige Gemengteile sieht man im Quarzporphyr nicht — dagegen können wir als sekundäre Bildung einige kleine Pyritkörner verzeichnen.

Unter dem Mikroskop springen vor allem die Quarzkörner in die Augen. Im Innern sind sie von unregelmäßigen Sprungrissen durchzogen, während ihre äußern Umrisse eine kräftige magmatische Resorption erkennen lassen, worauf namentlich die an ihnen häufig zu beobachtenden Einsackungen hindeuten. Außerdem verraten sie die Spuren eines starken Druckes, indem sie zwischen gekreuzten Nikols undulöse Auslöschung zeigen; ferner sind sie mitunter auch tatsächlich zerquetscht. Die aus der Zertrümmerung hervorgegangenen scharfeckigen Partikeln wurden durch ein feinkörniges Quarzzement späterer Entstehung miteinander wieder verkittet. Kurz es bietet sich dem Beobachter das Bild einer typischen Kataklasstruktur dar. Wenn der Druck ausgiebiger war, haben die zerquetschten und wieder miteinander verkitteten Quarze die Gestalt von ausgezogenen Linsen angenommen, was man in dem Gestein von der rechtsseitigen Rückenhöhe des Láz-Baches besonders gut beobachten kann, namentlich wenn man den Dünnschliff senkrecht zur Druckfläche anfertigen läßt.

Außer den Quarzen liegen auch ziemlich viele Feldspatkörner im Dünnschliffe. Dieselben sind zweierlei, nämlich Orthoklase ohne Zwillingsstreifung, die in ihren Schnitten nach oP gerade auslöschen und die sich in der Flamme als Loxoklase erweisen, und zwillingsgestreifte Plagioklase, die in manchen Fällen eine oligoklasartige Auslöschung erkennen lassen. Die Feldspate sind gerade so zertrümmert wie der Quarz, ja mitunter so sehr, daß ihre sich auch mineralisch umsetzenden kleinen Partikelchen sich förmlich in der Grundmasse verlieren.

Die mineralische Umsetzung äußert sich in der Ausscheidung von Serizitschüppchen und in der Bildung von Zoizitkörnchen. Die dünnen, gerade auslöschenden Serizitblättchen übersäen die Felder der Feldspate wie unregelmäßig ausgestreute Sägespähne. Im gewöhnlichen Lichte sind diese Schüppchen farblos, bei ge-

kreuzten Nikols dagegen polarisieren sie das Licht lebhaft gelb und löschen dabei gerade aus. Die farblosen, stark lichtbrechenden Körnchen des Zoizit resp. wahrscheinlich Klinozoizit nehmen im polarisierten Lichte die für dieses Mineral charakteristische lavendelblaue Färbung an, als das Resultat seiner schwachen Doppelbrechung. Neben diesem eisenarmen Zoizit fehlt aber auch der eisenhaltige Epidot nicht, dessen gelbe Körnchen zwischen gekreuzten Nikols sich vom Zoizit durch ein lebhaftes gelbes und rotes Farbenspiel unterscheiden. Obwohl der Zoizit auch in Orthoklaskörnern auftritt, ist er zweifellos häufiger in den Plagioklasen anzutreffen; — außerdem ist derselbe fleckenweise auch in der Grundmasse zu beobachten, jedenfalls als das Endprodukt der gänzlichen Unänderung irgend eines Feldspatkörnchens.

Als einstige Biotite können einige ausgefranzte und häufig verbogene Muskovit-artige Glimmerblätter betrachtet werden, an deren Rändern dünne, braune eisenreiche Säume sichtbar sind. Diese Schnitte entsprechen vollkommen den auch anderwärts vorkommenden gebleichten Biotiten, bei welchem Vorgange der Eisengehalt des Biotites als Eisenhydroxyd ausgeschieden zu werden pflegt. Derartig gebleichte Biotite habe ich besonders in den aus dem csúcsomer Tale und in den aus der Umgebung des Láz-Baches herstammenden Quarzporphyrstücken beobachtet. In den Quarzporphyrhandstücken des Rosznyó Tales dagegen habe ich den braunen Glimmer noch in Form von frischen Schuppen, teils jedoch bereits zu Chlorit ungewandelt vorgefunden. Dieser letztere Gemengteil zeichnet sich in Schnitten parallel ∞P durch aus Gelb und Grün bestehenden Pleochroismus, im polarisierten Lichte dagegen durch seine stahlblaue Farbe aus. Seine Entstehung wird deutlich erwiesen dadurch, daß seine Blättchen mitunter in paralleler Verwachsung mit Biotit zusammen vorkommen. Schließlich erwähne ich noch, daß einzelne winzige Biotit- und Chloritschüppchen verstreut auch in der feinkörnigen Grundmasse zu entdecken sind.

Indem ich nun zu den akzessorischen Gemengteilen übergehe, muß ich vor allen andern den Zirkon erwähnen, als einen sehr häufigen und beinahe in keinem Dünnschliffe fehlenden Gemeng-

teil. Seine Kriställchen sind teils länglich, teils kürzer und gedrungen und zumeist 0,06, 0,072, ja sogar mitunter 0,168, ja in einem Falle sogar 0,2 mm groß. Die kleineren sind in der Regel schärfer, während die größern Kristalle bereits einigermaßen wie abgewetzt erscheinen. Seine Kriställchen sind entweder farblos oder sehr licht bräunlich. Lichtbrechung auffallend stark. Zwischen gekreuzten Nikols sind für sie die lebhaften grünen und roten Polarisationsfarben, sowie die gerade Auslöschung charakteristisch. In einem Falle wurde ein größerer Kristall nahe zu oP angeschliffen und ergab infolgedessen das für Zirkon charakteristische Achsenbild, nämlich das schwarze Kreuz mit einem farbigen Ringe, welches mit Hilfe der Viertelundulations-Glimmerplatte als positiv bestimmt werden konnte.

Seltener stoßen wir auf eine vereinzelte lange dünne Apatitnadel, die bei gekreuzten Nikols durch ihre mausgraue Farbe niederer Ordnung auffällt. Einzelne Nadeln sind infolge der dynamischen Einwirkungen auf das Gestein gleichsam wie zu Gliedern zerbrochen, die zwar voneinander getrennt, aber im großen und ganzen doch noch in einer Reihe liegen und dadurch ihre einstige Zusammengehörigkeit beweisen. Zwischen diesen einzelnen Säulenstückchen befindet sich als frische Zementmasse feinkörniger Quarz. Die Apatitkristalle ergeben mittels der STRENGschen mikrochemischen Reaktion den für P_2O_5 charakteristischen gelben Niederschlag.

Sowohl der Zirkon als auch der Apatit können als die ältesten Ausscheidungen des in Rede stehenden Quarzporphyr-Magmas betrachtet werden.

Im Dünnschliffe des Quarzporphyrs aus dem Rozsnyó Tale habe ich noch spärlich eingestreut blaue und braune, stark pleochroitische Turmalinnadeln in einzelnen Gruppen angetroffen und schließlich erwähne ich noch, daß sich in den verschiedenen Dünnschliffen hin und wieder noch einzelne opake, in auffallendem Lichte gelb- und metallglänzende Körnchen vorfanden, die offenbar den auch makroskopisch beobachteten Pyritkriställchen entsprechen.

Alle diese porphyrisch ausgeschiedenen wesentlichen und akzessorischen Gemengteile liegen in einer dichten, aus winzigen

Quarzkörnchen und Serizitschüppchen bestehenden Grundmasse, welche die porphyrischen größern Gemengteile, sich an dieselben undulös anschmiegend, umgibt. Selten und bloß in sehr untergeordneter Menge nehmen an der Zusammensetzung der Grundmasse auch kleine Biotitblättchen resp. aus ihnen hervorgegangene Chloritschüppchen teil. Außer den Quarzkörnchen der Grundmasse, die ineinander wie verzahnt eingreifen, gibt es auch Quarz von späterer Entstehung, was man namentlich in den Fällen feststellen kann, wenn die durch Druck zerborstenen und voneinander getrennten Quarz- oder Feldspatteilchen in den Zwischenräumen wieder durch kleine Quarzkörnchen verkittet worden sind. Dieser Zementquarz liefert jedoch stets nur ein Mosaik. Es ist ferner auffallend, daß in dieser Ausfüllungsmasse Serizitschüppchen in der Regel blos sehr spärlich auftreten.

Um von den untersuchten Gesteinen auch in chemischer Beziehung ein klares Bild zu erhalten, führe ich die Analyse von zweien derselben an. Herr Dr. Edmund Ernyei hatte die Freundlichkeit dieselben auszuführen.

	1.	2.
SiO_2	66,45 %	65,23 %
Al_2O_3	20,85 „	15,10 „
Fe_2O_3	2,67 „	5,01 „
FeO	1,73 „	3,99 „
MnO	0,45 „	0,74 „
MgO	Spur „	— „
CaO	2,53 „	3,19 „
Na_2O	Spur „	1,85 „
K_2O	3,88 „	5,67 „
H_2O (gebunden)	0,21 „	0,18 „
Summa:	98,77 %	100,96 %

1. Quarzporphyr aus dem Bachgerölle des Rozsnyó Tales (Nr. 27).
2. Quarzporphyr aus dem obern Tale von Csúcsom (Nr. 190).

Fassen wir die Zahlen dieser beiden Analysen näher ins Auge, so sehen wir, daß unsere Gesteine nicht gerade zu den kieselsäurereichsten Quarzporphyren gehören. Sie stehen in dieser Beziehung den Quarzporphyren der Naifschlucht bei Meran

am nächsten. Doch scheint auch der Fall nicht ganz unwahrscheinlich, daß dieselben während der postvulkanischen und dynamometamorphen Einwirkungen und den dabei stattgehabten Umsetzungen etwas von ihrer Kieselsäure einbüßten, wohingegen die erhalten gebliebene Tonerde und der Gehalt an Kali prozentual etwas höher erscheint. Die Menge der Kalkerde dürfte sich nicht allein auf die noch anwesenden Plagioklase, sondern auch auf die nicht geringe Menge des Klinozoizit zurückführen lassen. Das Kaliumoxyd rührt nicht nur von den Orthoklasen, sondern zum guten Teil auch vom ziemlich reichlich vorhandenen Serizit her.

Aus Quarzporphyren hervorgegangene Porphyroide.

Bei der Untersuchung zahlreicher Schiefer des in Rede stehenden Gebietes hat es sich herausgestellt, daß dieselben zufolge dynamischer Einwirkungen aus den vorhin beschriebenen Quarzporphyren zu gänzlich schieferigen Gesteinen umgewandelt worden sind. Es sind dies solche Porphyrschiefer, die man nach Rosenbusch als Porphyroide zu bezeichnen pflegt. Das Endergebnis dieser Umwandlung sind die schmutzig-weißen oder gelblichen Schiefer, in denen als besonders auffallender Gemengteil der außerordentlich feinschuppige Muskovit oder Serizit zu bezeichnen ist, welcher in Form von mehr oder weniger silberglänzenden Häutchen die Spalt- und Trennungsflächen der Schiefer überzieht. Bis zu letzter Zeit hat man diese Schiefer im allgemeinen nach diesem am meisten auffallenden Mineral als serizitische Schiefer oder als serizitische Gneiße bezeichnet. Auf den Spaltflächen dieser Schiefer sind wir selbst bei der genauesten Untersuchung nicht imstande anderweitige und besonders größere Gemengteile zu erkennen. Im ganzen bemerken wir bloß kleinere Knoten und Warzen, die aber dicht eingehüllt sind in die wellenförmig und gekräuselt sich den Gesteinsblättern anschmiegenden Serizithäute. Ganz verschieden stellt sich dagegen das Gestein dar, wenn wir die Schiefer quer zerbrechen und dieselben auf dieser Bruchfläche untersuchen. Hier erblickt man zwischen den linienförmigen Serizitstreifen porphyrisch ausgeschiedene Gemeng-

teile, unter denen man bereits auf den ersten Blick Quarz und außerdem noch in vielen Fällen Feldspat erkennen kann. Der Quarz bildet stecknadel- bis erbsengroße, meist abgerundete Körner von rauchgrauer oder in vielen Fällen schwach bläulicher Farbe, so z. B. an zahlreichen Punkten des Ivágyó-Berges. Die sich vom Gesteine scharf abhebenden Quarzkörner sind für die vorliegenden Gesteine geradezu charakteristisch, indem sie ihnen eine porphyrische Struktur verleihen.

Zumeist finden wir in den Schiefern keine andern porphyrisch ausgeschiedenen Gemengteile als den Quarz, doch tritt ziemlich zahlreich der Fall ein, daß wir daneben auch noch Feldspat antreffen. Der Feldspat ist zweierlei, Orthoklas und Plagioklas. Den letztern erkennen wir leicht als solchen zufolge der Zwillingsstreifung auf seinen Blätterbrüchen, wohingegen der Orthoklas in manchen Fällen durch gut erkennbare Zwillinge nach dem Karlsbader Gesetz charakterisiert ist. Die Dimensionen der Feldspate schwanken zwischen Stecknadelkopfgröße bis zur Größe eines Zolles. Namentlich gelang es mir an der Südseite des Ivágyó-Berges solche Handstücke zu sammeln, in denen außer erbsengroßen bläulichen Quarzen auch mehrere Zentimeter große Karlsbader Zwillinge eingebettet sind, die sich als Orthoklase (Loxoklas) erwiesen haben.

Die mikroskopische Untersuchung dieser Porphyroide hat folgendes Resultat ergeben.

Quarz. Dieser Gemengteil zeigt häufig in sehr deutlicher Weise die magmatische Resorption, deren Vorhandensein schon aus dem Grunde wichtig erscheint, weil sie die Abstammung der in Rede stehenden Schiefergesteine aus Porphyr beweist, hingegen der Ableitung von andern Gesteinen, eventuell von Graniten ganz entschieden widerspricht. Die Quarzkörner hatten übrigens einen sehr hohen Druck zu erleiden, was nicht nur aus der undulösen Auslöschung im polarisierten Lichte zwischen gekreuzten Nikols hervorgeht, sondern auch durch die tatsächlich zu beobachtende Zertrümmerung bewiesen wird. Die einzelnen Quarzpartikel sind durch einen aus feinkörnigem Quarz bestehenden Zement miteinander verkittet, wodurch die sogenannte Mörtelstruktur entstanden ist.

In vielen Quarzen sind ganze Reihen von Interpositionen zu beobachten. Unter diesen befinden sich Glaseinschlüsse mit unbeweglicher und Flüssigkeitseinschlüsse mit lebhaft hin und her beweglicher Libelle. Die letztern, die als flüssige Kohlensäureeinschlüsse betrachtet zu werden pflegen, findet man besonders in den Quarzen der Porphyroide der Skalicza bei Rudna und des Wagner-Vilmos-Erbstollens ebendaselbst.

Der Quarz bildet in der Regel den vorherrschenden Gemengteil, außer ihm findet man aber stets auch noch mehr oder weniger Feldspat in dem Gesteine. Derselbe ist zweierlei: Orthoklas in einfachen Karlsbader Zwillingen (am Ivágyó bei Rudna) und zwillingsgestreifter Plagioklas. Der letztere bildet Zwillinge nach dem Albit-, ferner gleichzeitig auch nach dem Periklingesetz und schließlich auch noch nach dem Karlsbader Gesetze. Häufig sind die Feldspate ebenfalls zertrümmert, und dann weisen sie deutlich die Kataklasstruktur auf. Die Extinktion der Plagioklase wechselt von der oligoklasartigen bis zu den Werten vom Labradorit. Namentlich ist der letztere ziemlich häufig.

Die soeben skizzierten petrographischen Verhältnisse kann man in sehr typischer Weise in erster Reihe an den serizitischen Schiefern des Ivágyó-Berges bei Rudna und Nadabula beobachten, namentlich an der Süd- und an der Ostseite des genannten Berges, ferner ausnahmslos an den Schiefern des Lajos-Stollens bei Rudna, ferner in den Stollen Augusta, Bernhardi und Szadlovsky bei Nadabula, im neuen Erbstollen der Rimamurány-Salgótarjáner Eisenwerks A.-G. usw. — Ferner treffen wir diese Gesteine in Alsó-Sajó (Ignatius-Grube), in Sebespatak, in Csúcsom am Berge Csipketető, ebendaselbst in der MILLER'schen Antimongrube, in der Gemarkung der Stadt Rozsnyó in den beiden Tälern von Rozsnyó und Majoros, auf den südöstlichen Gehängen des Ramzsás, an den hochgelegenen Punkten Kosztoidás und Meszestető und endlich in der Stadt selbst in dem kleinen Aufschluß bei der neuen Elektrizitätsanlage u. a. O. an.

Obwohl der Feldspat häufig genug noch ganz frisch ist, bemerken wir in den Dünnschliffen unter dem Mikroskop doch, daß die Schnitte sowohl vom Orthoklas als auch vom Plagioklas von winzigen Serizitschüppchen ganz erfüllt werden, die offenbar

auf Kosten ihrer Wirte entstanden sind, und die zufolge ihrer Menge die Durchsichtigkeit der Feldspate merklich beeinträchtigen.

In einzelnen Fällen, so z. B. im nordöstlichen Zweige des Majoros-Tales, kommen in denselben auch noch längliche Klinozoizitkörnchen vor. Dieselben sind blaßgelblich, von starker Licht-, jedoch von sehr schwacher Doppelbrechung, welche die bekannte, sehr niedrige blaue Polarisationsfarbe im Gefolge hat.

Einstige größere Biotitlamellen sind im Gestein selten anzutreffen und wenn solche auch entdeckt werden können, wie z. B. im Rozsnyó Tale, so sind sie dort zumeist bereits zu grünem Chlorit umgewandelt. Manche ausgelaugte, gebleichte Biotite sind ganz von Sagenitgeweben erfüllt (großer Steinbruch beim Zólyombrezó). In andern Fällen sind derartig gebleichte Biotitlamellen dicht erfüllt von Epidotkörnchen, wie man dies z. B. in den quarzreichen Porphyroiden zwischen dem Sulower Sattel und dem dortigen Granitstock beobachten kann.

In Form von kleinern Schüppchen treffen wir den Biotit, sich mehr oder weniger in der Grundmasse verlierend, häufiger an, so z. B. im Porphyroide des rozsnyóer Meszestető, in welchem die kleinen braunen Glimmerfetzen entweder für sich allein oder mit Chlorit verwachsen vorkommen (Rozsnyó, Majoros-Tal).

Bläulichschwarze, metallglänzende undurchsichtige Erzkörnchen befinden sich ebenfalls in unsern Porphyroiden, jedoch bloß sehr selten. Nachdem sie sich zumeist mit einer eigentümlichen weißlichen, schwach lichtbrechenden und als Titanomorphit oder Leukoxen zu benennenden Verwitterungshülle umgeben, ist man geneigt das Muttererz selbst als Ilmenit oder wenigstens als titanhaltigen Magnetit zu betrachten. (Rozsnyó, südöstlicher Zweig des Majoros-Tales.) Scharfe Magnetitkristalle von oktaëdrischer Form kommen im Porphyroide von Kosztoidás vor. Dieselben können bereits mit der Lupe beobachtet werden; auch sind sie stark magnetisch.

Ein weiterer häufig vorkommender Übergemengteil ist der Zirkon, welcher spärlich in beinahe jedem Dünnschliffe der Porphyroide nachgewiesen werden kann. Die ganz schwach bräunlichen, etwas abgewetzt aussehenden Kriställchen sind nicht einmal

gar so klein, indem ihre Länge zwischen 0,03—0,22 mm schwankt, wobei ihre Dicke bis zu 0,06 mm erreichen kann. Die Zirkone liegen zumeist in der Grundmasse, und bloß im Porphyroide des nadabulaer Szadlovszky-Stollens gelang es mir, einen Zirkon als Einschluß in einem porphyrisch ausgeschiedenen Quarzkorne zu finden.

Hie und da ist in unsern Porphyroiden auch eine Apatit-Säule anzutreffen, von denen manche durch den Druck wie zu Gliedern in mehrere Teile zerbrochen sind. Dieser Gemengteil gehört mit dem vorhin erwähnten Zirkon zusammen zu den ältesten Ausscheidungen der einstigen Quarzporphyroide.

Der Turmalin, welcher ein sehr bemerkenswerter Zeuge der einstigen pneumatolisch-hydatogenen Wirkungen ist, wird in den Porphyroiden sehr häufig angetroffen, und es ist auffallend, daß seine länglichen Kriställchen mitunter quer zur Schichtung gestellt sind, zum Zeichen dessen, daß sie offenbar späterer Entstehung sind (Nadabula, Augusta). Wenn wir nach all dem die Grundmasse unserer Porphyroide untersuchen, so bemerken wir, daß dieselbe nicht nur in bezug auf ihre mineralischen Gemengteile, sondern auch bezüglich ihrer Struktur in hohem Maße verändert ist. Auf den ersten Blick erscheint dieselbe in den meisten Fällen vorwiegend aus Quarzkörnchen und Serizitschüppchen zu bestehen. Indem wir sie aber näher betrachten, entdecken wir unter den wasserhellen Körnchen ziemlich häufig Albit (Rudna, Wagner V.-Erbstollen). Nachdem diese Albitkörnchen keine charakteristischen Umrisse aufweisen, weder Spaltrisse, noch typische Zwillingsverwachsungen zeigen, können sie sehr leicht mit Quarz verwechselt werden, wovor uns bloß die Untersuchung in konvergent polarisiertem Lichte schützen kann. Es ist außerdem bemerkenswert, daß sich neben dem Albit, obgleich spärlicher, auch zwillingsgestreifter Plagioklas in der Grundmasse befindet (Rudna, oberhalb Szkalicza). Die Quarz- und Feldspatkörner befinden sich gewöhnlich miteinander verzahnt vor.

Die Serizitschuppen sind wasserhell oder lichtgrünlich und stets gerade auslöschend. Ihre Anordnung ist gänzlich unregelmäßig und nicht der allgemeinen Schichtung der Gesteine untergeordnet. Dieselben übersäen die quarzige Grundmasse wie auf-

gestreute Sägespähne, und es stehen deren Schüppchen häufig quer zur Schichtung. In manchen Porphyroidschiefern jedoch sind die Serizitschuppen in der Richtung der Gesteinsschieferung angelagert (Rozsnyó Tal). Die Schichtenflächen sind durch Serizithäutchen, in denen sich mitunter auch Biotit- und Chloritschuppen befinden, markiert, und es ziehen diese Glimmerhäute im Querbruch als gerade oder um die porphyrischen Gemengteile wellenförmig gebogene Linien durch das Gestein, und rufen dadurch dessen blätterig-schichtige Struktur hervor. Die zwischen derartigen Glimmerhäuten befindlichen Quarz-, Albit- und Serizitmassen zeigen von dynamischen Einwirkungen keine Spur.

Außer den bisher erwähnten Gemengteilen der Grundmasse erblicken wir in ihr teils in einzelnen Gruppen, teils schmale Streifen bildend Klinozoizit, sowie mit demselben vergesellschaftet auch noch etwas Epidot. Das erstere Mineral ist nahezu farblos, das letztere hingegen lebhaft gelb (Rozsnyó Tal, Majoros Tal, am Sulowaer Sattel). Während das erstere im polarisierten Lichte eine schwachblaue Farbe annimmt, erscheint der letztere in lebhaften gelben und roten Farben. Anhäufungen von zitronengelben Epidotkörnern sind auch in den Porphyroiden des Ivágyó zu beobachten (Nadabula, Bernhardi-Stollen; Rudna, Lajos-Stollen). Es erleidet keinen Zweifel, daß beide Epidotarten späterer Entstehung sind, und daß dieselben auf Kosten der Feldspate, namentlich der Plagioklase, außerdem aber noch der Biotite entstanden sind.

Ein weiterer Gemengteil von ebenfalls sekundärer Entstehung ist der Siderit. Dieses Mineral tritt teils in Form von einzelnen scharfen Rhomboëdern, teils in Gestalt von größern unregelmäßigen Anhäufungen auf, die aber auch in diesen Fällen die rhomboëdrische Spaltbarkeit ganz deutlich zeigen. Zwillingsbildung ist an denselben nicht zu beobachten. Die Sideritausscheidungen haben eine schmutzigweiße Farbe und zeigen im polarisierten Lichte eine Aufhellung von einer unbestimmten weißlichen Farbe. Der Siderit tritt teils versprengt in der Grundmasse auf in Form von einzelnen Körnchen, zumeist jedoch hat sich derselbe entlang einzelner Risse angesiedelt, an denen auch anderweitige Neubildungen zu konstatieren sind, namentlich Quarz jüngerer Ent-

stehung, Albit und Serizit. Im Vereine mit diesen Mineralen dringt der Siderit auch zwischen die Quarzkataklase hinein. Erwärmte Salzsäure löst den Siderit leicht und vollkommen aus dem Dünnschliffe heraus. Während dieser mikrochemischen Reaktion können wir das Entweichen der Kohlensäure beobachten, wogegen die Lösung die Eisenreaktion liefert. Der Porphyroid vom nadabulaer Bernhardi-Stollen enthält nach der Untersuchung des Herrn Dr. K. Emszt 0,52 % CO_2 resp. 1 % $FeCO_3$. Wenn wir unsere Porphyroide in dieser Hinsicht untersuchen, finden wir in den meisten Siderit, so z. B. im Gesteine von Alsó-Sajó (Ignatius-Grube), in Nadabula (Augusta-Stollen, Bernhardi-Stollen, Szádlovszky-Stollen, Neuer Erbstollen), in Rozsnyó (Städtischer Steinbruch, im Rozsnyó Tal), in Rudna (Lajos-Stollen, Wagner V.-Erbstollen, am Ivágyó und auf der Szkalicza). Durch Oxydation werden diese Siderit-Rhomboëder und -Anhäufungen rostbraun.

Es ist nicht uninteressant, daß sich in manchen Dünnschliffen graue, im polarisierten Lichte völlig indifferente Körper befinden, die nichts anderes sind als die negativen Hohlräume von einstigen, nachträglich aber durch Lösung entfernten Sideritgruppen, unter denen in vielen Fällen die *R*-Form deutlich zu erkennen ist. Daß wir es in diesem Falle tatsächlich mit negativen Kristallhohlräumen zu tun haben, davon überzeugte ich mich auf die Weise, daß ich einen Sideritrhomboëder enthaltenden Porphyroiddünnschliff (Nadabula, Bernhardi), so lange mit Salzsäure kochte, bis der gesamte Sideritgehalt vollständig herausgelöst wurde. Nach der Entfernung des Siderites sind nun genau dieselben hohlen Formen entstanden, wie die vorhin erwähnten.

In einem Falle habe ich ferner noch ein weiteres Karbonat entdeckt und zwar den Kalkspat, welcher von allerjüngster Entstehung und der durch Einsickerung von außen in das Gestein eingedrungen ist. Unter dem Mikroskop werden dessen Körner durch seine bekannte Zwillingsstreifung, sowie durch das lebhafte Brausen mit verdünnter Salzsäure hinlänglich charakterisiert (Rozsnyó Tal).

Einige typische Porphyroide unsers Gebietes weisen folgende chemische Zusammensetzung auf:

	1.	2.	3.	4.
SiO_2	62,37	68,95	67,35	70,70
Al_2O_3	21,26	14,28	15,73	14,23
Fe_2O_3	3,57	2,81	3,61	2,56
FeO	6,45	4,65	2,79	2,83
MnO	0,11	0,36	Spur	0,40
MgO	0,38	—	0,28	—
CaO	0,55	1,79	0,84	0,51
Na_2O	1,22	—	1,07	2,26
K_2O	2,62	5,80	3,47	4,98
H_2O (gebunden)	0,11	0,15	0,45	0,21
CO_2	—	—	3,19	—
Summa:	99,64	98,79	98,78	98,69

1. Gefalteter Porphyroid, mit porphyrisch ausgeschiedenem Quarz von Nadabula, Szádlovszky-Stollen (Nr. 57).

2. Porphyroid, mit reichlich ausgeschiedenem violetten Quarz. Nadabula, Bernhardi vom äußersten Liegenden (Nr. 67).

3. Porphyroid, mit porphyrischen Quarzausscheidungen. Nadabula, aus dem neuen Erbstollen der Rimamuránver Eisenwerks A.-G. (Nr. 100).

4. Grünlicher, seidenglänzender serizitischer Porphyroidschiefer vom Saalband des Sideritlagers. Nadabula, Augusta-Stollen (Nr. 118)*.

Aus diesen Analysen ist ersichtlich, daß die in Rede stehenden Gesteine nicht bloß auf Grund der in ihnen nachweisbaren mineralischen Gemengteile, sondern auch in bezug auf ihre chemische Zusammensetzung mit bekannten Quarzporphyren gut übereinstimmen. Ihr Kieselsäuregehalt beträgt bis 70 %, die Tonerde 14—15 % und ist dieselbe bloß in einem Falle größer; die Alkalien machen 4—6 % aus, wovon der größere Teil in der Regel auf das K_2O entfällt, woraus man wohl auf das einstige Übergewicht des Kalifeldspates schließen darf. Der Wassergehalt ist gering, wodurch unsere Porphyroide sich von den mitunter ganz ähnlich aussehenden Phylliten unterscheiden.

* Der Kieselsäuregehalt des an der Südseite des Ivágyó, auf dem gegen die Skalicza herabziehenden Rücken in einer Höhe von 630 m vorkommenden großen Orthoklas und bläuliche, erbsengroße Quarze enthaltenden Porphyroids beträgt 67,25 %.

Klastoporphyroide oder Tuffporphyroide.

In der dritten, im Jahre 1896 erschienenen Auflage seiner Petrographie (II. Bd. p. 728) betonte H. Rosenbusch die Schwierigkeiten, denen man begegnet, wenn man die Klastoporphyre, nämlich die aus Quarzporphyrtuffen auf dynamometamorphem Wege entstandenen Porphyroide von den eigentlichen Porphyroiden abtrennen will. Äußerlich sind dieselben ganz den ebenfalls schieferigen, serizitischen Porphyroiden ähnlich. Ihre Gemengteile sind dieselben, als die der Porphyroide, was durchaus nicht befremden kann, wenn man bedenkt, daß das Tuffmaterial der Quarzporphyr-Eruptionen, die größern oder kleinern Rapilli und die Asche, eigentlich nichts anderes ist, als die Substanz der betreffenden Quarzporphyre selbst. Namentlich haben außer K. Lossen, O. Mügge und H. Rosenbusch nur noch wenige Forscher die Spuren von Klastoporphyren verfolgt. In den sporadischen Fällen, in denen dieselben bisher den Gegenstand der Untersuchung bildeten und die sich hauptsächlich auf Gesteine des Harz und des Odenwaldes beziehen, haben sich die betreffenden Forscher dahin geäußert, daß das Kriterium zur Erkennung der Tuffporphyroide in der klastischen Struktur zu suchen sei, welche diese Tuffe notwendigerweise einstens charakterisiert haben muß. Die klastische Struktur der Porphyrtuffe wird aber in gefalteten Gebirgen durch den großen Druck mehr oder weniger verwischt, und dieser Umstand erschwert deren sichere Erkennung sehr. Außer der klastischen Struktur pflegen ferner noch zahlreiche größere oder kleinere Hohlräume zwischen den Gemengteilen der einstigen Tuffe zurückzubleiben, die sich häufig unter dem Drucke nicht immer sämtlich schließen. Und in solchen noch zurückbleibenden Hohlräumen kristallisieren dann aus den im Gestein zirkulierenden Lösungen neuere Minerale, in Form von kleinen Geoden.

Diese Umstände habe auch ich vor Augen gehalten, als ich die gömörer Porphyroide mikroskopisch untersuchte.

Die Klastoporphyroide des Szepes-Gömörer Porphyroidgebirges sind von den typischen Porphyroiden nicht verschieden. Obwohl die porphyrisch eingesprengten Quarzkristalle hauptsächlich für die eigentlichen Porphyroide charakteristisch sind, finden wir

unter den als Tuffporphyroide anzusprechenden Schiefern auch solche, in deren Querbruche auch porphyrisch eingesprengte Quarzkörner, ja sogar mitunter auch Feldspate zu beobachten sind. In den meisten jedoch sind die erwähnten Gemengteile bloß in Form von kleinern Trümmern enthalten oder aber vermissen wir dieselben auch gänzlich, so daß das Gestein makroskopisch als ein Serizitschiefer oder als ein serizitischer Quarzitschiefer zu bezeichnen wäre.

Ihre mineralischen Gemengteile sind in Kürze folgende:

Größere Quarzstückchen und ferner noch mehr als diese größere Feldspate, welch letztere Plagioklase sind, und zwar Zwillinge nach dem Albit- und mitunter auch nach dem Periklingesetz. Die Feldspate sind stark zerquetscht. Häufig bemerkt man um einzelne größere Plagioklaskörner auf deren Umfang vertikal gestellte Biotit- und Chloritschüppchen, die im Verein mit Quarzkörnchen dieselbe kranzförmig umgeben (Südseite des Ivágyó, Veszverés westlich). In dem Porphyroide des letzteren Fundortes entsprechen die größern Quarzkörner einzelnen Kristallbruchstücken, die Grundmasse dagegen, die aus einem feinkörnigen Gemenge von Quarz und Serizit besteht, besitzt schichtenweise eine verschiedene Korngröße. In der Grundmasse kann man wenig Biotit resp. dessen Umwandlungsprodukt, grünen Chlorit, beobachten. Neben dem letzteren zeigt sich dann hin und wieder noch in kleinen Körnchen auch etwas Epidot. Schließlich wäre noch zu erwähnen, daß in den Dünnschliffen dieser beiden Gesteine auch der Zirkon nicht fehlt.

In der Millerschen Antimongrube bei Csúcsom fand ich im Liegenden der dortigen Kluft einen hauptsächlich aus Serizitschüppchen und Quarzkörnchen gebildeten Tuffporphyroid aus linsenförmig, abwechselnd gröber und feiner struierten Partien bestehend. In den linsenförmigen Knoten liegen einzelne große zerbrochene Orthoklas- und Quarzkörner, sowie ferner noch hie und da auch noch ein Plagioklaskorn. Sideritkristalle sind im Gestein teils verstreut, teils in den feinen Spalten in Gesellschaft von Gangquarz anzutreffen.

Die Grundmasse des im Millerschen Erbstollen bei Csúcsom gesammelten Gesteins besteht aus einem feinkörnigen Gemenge

von Serizit und Quarz, welches schichtenweise eine verschiedene Korngröße aufweist und in welcher sich ziemlich viel gequetschter Feldspat und Quarz befindet. Das eine Orthoklaskorn hat sich nachträglich durch einen neu zugewachsenen Mikroklinsaum vergrößert, um andere größere Körner dagegen finden wir aus Quarz und Albit bestehende Kränze.

In Alsó-Sajó zeigt der im Liegenden der Quecksilbererze vorkommende Porphyroidschiefer ebenfalls sehr deutlich die Serizitkränze nicht nur um einzelne Feldspat-, sondern auch um Quarzkörner. In diesem Gestein kann man außerdem auch einzelne Zirkonkriställchen, ferner Gruppen von Rutilnadeln, sowohl in der Grundmasse, als auch im Quarze beobachten. Turmalin kommt ebenfalls in Form einzelner Kristallgruppen vor; auch findet man noch einzelne Pyritkriställchen und ziemlich zahlreiche Siderit-Rhomboeder. Schließlich muß im Tuffporphyroid von Alsó-Sajó noch das Vorkommen von Schuppen eines schwach doppelbrechenden olivengrünen Chloritoides erwähnt werden. Derselbe scheint späterer Entstehung zu sein, da seine Blättchen nicht deformiert sind. Der Kieselsäuregehalt dieses Gesteins beträgt 66,8 %.

Der in der Gemarkung von Váralja-Dénes am Gehänge der Pirtyi genannten Kuppe unter Nr. 122 gesammelte Porphyrschiefer kann zufolge der in ihm auftretenden, aus Albit-, Biotit- und Chloritschüppchen bestehenden Kränze und Zonen, welche die zwischen den größern Feldspatkörnern befindlichen Räume ausfüllen, wohl ebenfalls als aus Tuff entstanden bezeichnet werden. Im Dünnschliffe dieses Gesteins kann ferner auch eine typische, längliche Quarzgeode beobachtet werden. In diesem Schiefer liegen übrigens außer einzelnen porphyrisch eingestreuten Quarzen noch ziemlich zahlreiche Plagioklase. Zirkon ist dagegen bloß auf einige Kriställchen beschränkt. Auf Grund von den angeführten ähnlichen Erscheinungen kann ferner als Tuffporphyroid betrachtet werden das Gestein des Magasteto bei Rozsnyó, das Gestein der Uhorna Sattelhöhe, das zwischen der Siroka Dolina von Lassúpatak und der Dolina-Hatarska vorkommende Gestein, welches im Dünnschliff ebenfalls das Vorhandensein von einzelnen mikroskopischen Geoden erkennen läßt. Dieses letztere Gestein scheint übrigens ein konglomeratischer Tuffporphyroid zu sein.

der sich aus einstigen Lapillistückchen gebildet hat. Einzelne linsenförmige Gesteinspartien desselben tragen nämlich eine rein porphyrische Struktur zur Schau und es erscheinen dieselben durch starke glimmerige Schnüre voneinander getrennt. Als Tuffporphyroide können ferner angesprochen werden die Gesteine des Sebes-Tales, des Bányicska-Tales (Szomolnok), in dem um einzelne Orthoklaskörner faserige Kränze von Quarz und Chlorit sichtbar sind. Endlich mögen die am Fuße des Zenderling Berges bei Göllniczbánya vorkommenden Porphyroidschiefer, sowie der Hangendschiefer von Charitas in Szomolnok erwähnt werden, deren Grundmasse linsenförmig struiert ist und abwechselnd aus verschiedenen Korngrößen besteht, welche in betracht der fragmentarischen Beschaffenheit der zerbrochenen größern Quarzkörner ebenfalls Klastoporphyroide zu sein scheinen. Bezüglich der Göllniczbányaer Klastoporphyroide muß noch bemerkt werden, daß sich in denselben zahlreiche körnige Quarzitlinsen, sowie quer zur Schichtung durchziehende Quarzadern befinden, so daß dieser Schiefer sich bereits sehr gewissen serizitischen Quarzitschiefern nähert.

In der Erkennung oder Unterscheidung der Klastoporphyroide von den normalen Porphyroiden unterstützt uns auch die chemische Untersuchung, wie dies aus den nachstehenden zwei Analysen hervorgeht.

	1.	2.
SiO_2	69,47	80,42
Al_2O_3	16,22	13,36
Fe_2O_3	4,13	1,17
FeO	2,77	0,50
MnO	0,43	Spur
MgO	Spur	Spur
CaO	0,36	0,19
Na_2O	1,65	—
K_2O	3,07	1,97
H_2O (gebunden)	0,26	0,35
Summa:	98,36	97,96

1. Tuffporphyroid, Hangendschiefer, aus Grube Charitas, Szomolnok (Nr. 141).

2. Quarzreicher Tuffporphyroid, Gölniczbánya, an der Straße vom Fuße des Zenderlingberges (Nr. 134).

Die chemische Zusammensetzung des erstern Szomolnoker Schiefers nähert sich derjenigen der normalen Porphyroide, wohingegen das letztere Gestein von Göllniczbánya sowohl makroskopisch, als auch mikroskopisch als sehr quarzreich bezeichnet werden muß, was auch durch den außergewöhnlich hohen SiO_2-Gehalt der Analyse bestätigt wird.

Die richtige Auffassung der Klastoporphyroide ist jedenfalls eine sehr heikle Sache, denn wenn es auch in einzelnen Fällen gelingt, auf Grund mikroskopischer und chemischer Nachweise dieselben zu erkennen, so wird es gewiß noch sehr vieler Untersuchungen bedürfen, bevor man an eine Scheidung der Klastoporphyroide von den Porphyroiden im Terrain auch nur denken könnte. Vorderhand halte ich es für das beste, wenn wir beide Gesteinsglieder beisammenlassen und dieselben unter der allgemeinen Bezeichnung der Porphyroide einesteils von den Quarzporphyren, andernteils von den metamorphen Sedimenten trennen.

Metamorphe Gesteine.

Auf dem Gebiete des Szepes-Gömörer Erzgebirges treffen wir außer den angeführten Gesteinen, nämlich außer den Quarzporphyren, den Porphyroiden und den Klastoporphyroiden auch noch Schiefer, ja sogar stellenweise auch Kalksteinlager an, die von den angeführten abweichend als einstige Sedimente aufzufassen sind.

Ein solches Gestein ist z. B. jener leichtgrüne phyllitische Tonschiefer, welcher in der Mangangrube von Csúcsom das Hangende bildet. Das feinkörnige Gemenge dieses Gesteins besteht aus Quarzkörnchen und wenig Serizit. Im Dünnschliffe wechseln lichtere und dunklere Streifen miteinander ab, die, wie man es bereits auch mit freiem Auge wahrnehmen kann, durch dünne Serizitlagen von einander getrennt werden. Bei stärkerer Vergrößerung ist eine Unmasse von Rutilnadeln zu bemerken, die in einzelnen streifenartigen Zonen das Gestein durchziehen. Epidotkörnchen und Sideritausscheidungen sind ebenfalls vorhanden, während einzelne schwarze Pünktchen von Graphit herrühren. Endlich möge noch das Vorkommen von ein bis zwei abgewetzt aussehenden Zirkonkriställchen erwähnt werden.

Ein ähnlicher, jedoch etwas dunklerer Tonschiefer kommt auch im Erbstollen der MILLERschen Antimongrube, vom Mundloche an gerechnet 150 m einwärts, vor. Auch hier wird das Schiefergestein vorwiegend aus Quarzkörnchen und Serizitschüppchen gebildet. Jedoch befinden sich in demselben bereits viel Graphitkörnchen und -staub, welcher wolkenartig das Gestein durchzieht. Außerdem sind außerordentlich viele Rutilnadeln zu verzeichnen in einzelnen wie auch in Zwillingskristallen. Turmalin dagegen ist spärlicher durch einzelne Kriställchen vertreten, von denen einige mitunter Rutilnadeln einschließen. Kleine Spitter dieses dunkeln graphitischen Gesteins verändern ihre Farbe nach intensiver Weißgluterhitzung vor dem Lötrohre zu einer lichtgrauen.

Fig. 1. Geologisches Profil des Erbstollens der MILLERschen Antimongrube (nach eigener Aufnahme). *a* Schwarzer Tonschiefer, *b* weißer körniger Kalkstein, *c* grauer Ankerit, *d* kupfer- und silberhaltiger Erzgang, *e* graphitischer Tonschiefer, *f* Kalkschiefer, *g* Porphyroide mit einzelnen schwachen Antimonschnüren. Der Erbstollen wurde in süd-nördlicher Richtung getrieben und der abgebildete Teil desselben ist ungefähr 200 m lang. Einfallen der Schichten 11—12 Stdn. unter 60°.

Außer diesen mehr oder weniger dunkelgrauen Tonschiefern gibt es auch ganz schwarze, selbst mit freiem Auge als graphitische zu erkennende Tonschiefer, sowohl im Hangenden der csúcsomer, als auch im Erbstollen der MILLERschen Antimongrube. Das geologische Profil dieses Erbstollens ist beistehend wiedergegeben (Fig. 1).

Daß wir es in den erwähnten Fällen tatsächlich mit Tonschiefern zu tun haben, geht auch aus der Analyse hervor, in welcher der niedrige Kieselsäuregehalt, die verhältnismäßig hohe Aluminiumoxydmenge, sowie die beträchtliche Menge an Wasser sofort ins Auge springt.

In lufttrockenem Zustande ist in diesem Tonschiefer enthalten:

SiO_2	57,52 %
Al_2O_3	24,39 „
Fe_2O_3	1,54 „
FeO	5,35 „
MnO	0,44 „
MgO	Spur „
CaO	Spur „
Na_2O	1,43 „
K_2O	3,59 „
H_2O	5,51 „
Glühverlust	0,18 „
Summa:	99,95 %

Der analytisch untersuchte Schiefer entstammt aus dem Hangenden der Mangangrube von Csúcsom.

Als ein metamorphisches Gestein müssen wir ferner auch jenen graulichweißen Marmor betrachten, welcher in der Antimongrube von Csúcsom vorkommt. Seine Masse besteht aus körnigem Kalzit, zwischen welchem sich jedoch auch einzelne Quarzkörner und Quarzschnüre befinden. Ebenso sind in demselben auch einzelne Pyritkriställchen eingestreut, die wir bereits mit freiem Auge bemerken.

In der Mangangrube kann man in diesem körnigen Kalk manganhaltige Ausscheidungen, ebenso wie Magnetit- und Pyritlinsen und -schnüre antreffen. Das geologische Vorkommen dieses Kalklagers ist aus umstehendem Profil ersichtlich.

Typische, mehr oder weniger graphitische Tonschiefer kommen zwischen Porphyroiden in Alsó-Sajó, in dem den Gampl-Tagbau mit dem Ignatius-Stock verbindenden Erbstollen vor, ebenso wie auch an der Peripherie dieses Erzstockes selbst. Und ebenso hatte ich Gelegenheit auch im Petersstollen von Szomolnok graphitischen Tonschiefer zu sammeln. Dieser letztere enthält nach einer partiellen Analyse 59,14 % Kieselsäure und 1,29 % Karbon. An beiden Orten kommen auch Porphyroide vor.

Ferner müssen wir noch des Vorkommens der serizitischen Quarzschiefer gedenken, die ebenfalls in die Reihe der metamorphen Schiefer gehören. Derartige Schiefer sind z. B. jene an

der Westlehne des untern Abschnittes des Rozsnyó Tales befindlichen Quarzitschiefer, in deren aus feinen Quarzkörnern bestehender Grundmasse einzelne eckige Quarztrümmer eingesprengt sind. In einzelnen Quarzkörnern kann man Rutileinschlüsse beobachten.

Die Serizitschüppchen der Grundmasse sind im großen ganzen

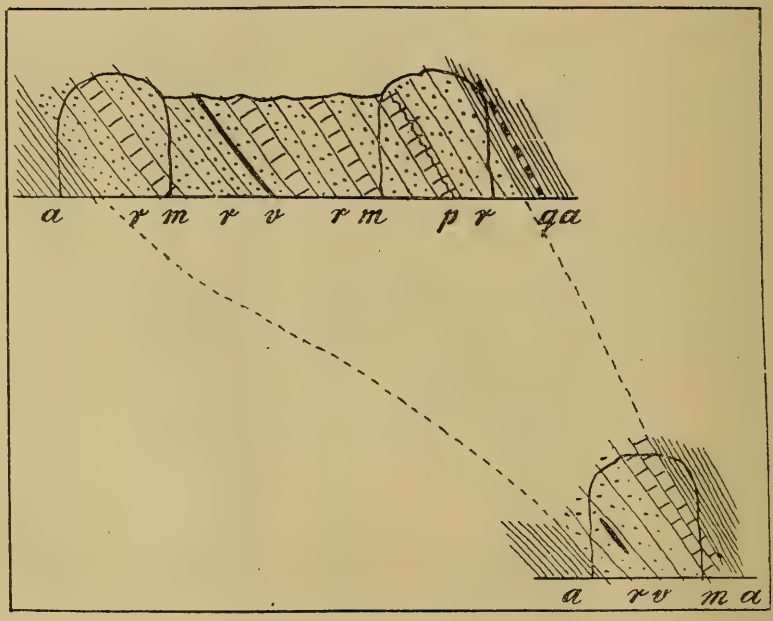


Fig. 2. Geologisches Profil der ärarischen Mangangrube bei Csúcsom (nach eigener Aufnahme). *a* Tonschiefer (teilweise graphitisch), *q* Quarzader, *m* kristallinischer Kalk, *r* Manganspatausscheidungen (stellenweise mit Tremolith und Granat), *v* Magneteisen, *p* Pyritader im Kalk. Sowohl im obern als auch im untern Stollen ist das Einfallen der Schichten 10—11 Std. unter 50—60°.

parallel zur Schieferung eingebettet, oft jedoch umgeben sie mit radialer Anordnung kranzförmig einzelne größere Quarzkörner. Die Schichtung wird eigentlich durch Gruppen graphitischer Körnchen zum Ausdruck gebracht, die sich als flatternde Bänder durch das Gestein hindurchziehen.

Als akzessorischer Gemengteil mag noch der in einzelnen Kriställchen vorkommende Turmalin erwähnt werden.

Im Erbstollen der csúcsomer Antimongrube findet man

zwischen den daselbst befindlichen Tonschieferschichten auch einzelne Quarzitbänke, in denen der SiO_2-Gehalt bis 86,65 % erreicht.

Wenn wir im csúcsomer Tale aufwärtsgehend den Volovecz ersteigen, so können wir, die Grenze des im Tale aufgeschlossenen Quarzporphyrstockes überschreitend, in den scharfzackigen Felsen des Csipketető noch eine Strecke weit Porphyroide beobachten, die aber gegen die 1286 m hohe Kuppe des Volovecz hin alsbald metamorphen quarzitischen Tonschiefern den Platz einräumen: An der Südseite der Volovecz-Kuppe habe ich in der Höhe von 1150 m einen derartigen Tonschiefer mit 62,28 % SiO_2 gesammelt. Indem ich von hier aus die Komitatsgrenze zwischen Gömör und Szepes auf dem vom Volovecz östlich ausstrahlenden Rücken weiter verfolgte, stieß ich auf der nächstfolgenden, dem Rücken aufgesetzten Katusdeka genannten Kuppe alsbald auf einen schwarzen graphitischen Quarzitschiefer, dessen Schichten unter 20—30° gegen Stunde 8—9 zu einfallen.

* * *

Im vorstehenden haben wir nachgewiesen, daß sich im Szepes-Gömörer Erzgebirge Quarzpophyre, ferner aus deren Laven und Tuffen entstandene Porphyroide und endlich auch wirkliche Sedimente befinden. Alle diese Gesteine sind aber nicht mehr in ihrem normalen Zustande, sondern verändert, was sich nicht nur durch das Auftreten von zahlreichen akzessorischen Mineralien, sondern auch durch eine bedeutende strukturelle Deformation verrät.

Die Schieferung unserer Porphyre und Porphyrtuffe wurde gewiß in erster Reihe durch den Druck der gewaltigen vulkanischen Massen, sowie durch Gebirgsfaltungen verursacht.

Wenn wir die Ausdehnung und die Mächtigkeit der Szepes-Gömörer Quarzporphyr-Eruption infolge der zerstörenden Erosion während der seither abgelaufenen langen Zeitabschnitte vielleicht nie werden richtig beurteilen können, so kann man doch annehmen, daß diese Eruptionen sowohl ihrer Fläche als auch ihrer Masse nach sehr bedeutend gewesen sein müssen, und daß die an die Oberfläche gelangte Lava, sowie auch die Masse des Tuffmaterials die heute noch sichtbaren Reste vielmal übertroffen

haben mag. Ein hoher Druck kann wohl im Innern der gewaltigen eruptiven Massen mit Recht angenommen werden, und die schieferige Erstarrung in den tiefern Teilen des Quarzporphyrmagmas dürfte auf diesen Umstand zurückgeführt werden.

Es sei erlaubt an dieser Stelle auf die mehrere hundert Meter mächtige Quarzporphyrmasse der schweizer Windgälle hinzuweisen, deren tiefere Partie schieferartig geschichtet erscheint, wohingegen dasselbe Gestein in den obern Teilen der Masse einen normalen Quarzporphyr darstellt und zwar mit typisch säulenförmiger Absonderung.

Bloß an einzelnen Punkten erstarrte der Quarzporphyr des Szepes-Gömörer Erzgebirges mit seiner ihm bei normalen Druckverhältnissen zukommenden massigen Struktur. Ein solches Vorkommen erkennen wir in dem größern Quarzporphyrstock im csúcsomer Tale, sowie ferner in dem kleinern des Zlata-Tales. Ob es wohl gestattet ist, diese Punkte als Eruptionsstellen, nämlich als die Schlotausfüllungen der einstigen Vulkane aufzufassen, kann heute noch nicht endgültig entschieden werden. Jedoch ist die Struktur selbst dieser Quarzporphyrstücke nicht völlig normal und ungestört, da wir selbst an ihrem Gesteine die durch Druck entstandenen Kataklase deutlich zu erkennen imstande sind. Eine besondere Art der Piëzokristallisation äußerte sich übrigens auch noch darin, daß sich namentlich die Kalifeldspate der Grundmasse in spezifisch dichteren Serizit, die Plagioklase dagegen teilweise zu Klinozoizit umgeändert haben, während der hie und da auftretende Biotit teilweise zu Chlorit wurde. Die Umsetzung der Gemengteile zu Mineralien von ähnlicher Zusammensetzung, jedoch geringerem Volum, kann besonders in den Quarzporphyren und in den Porphyroiden beobachtet werden, während in den Klastoporphyroiden mehr die Serizitierung zum Ausdruck gelangte. In diesen letzteren habe ich keine Umsetzung zu Zoizit beobachtet. In der mehr lockeren Masse verdanken die während der Zusammenpressung der Schichten gebildeten Serizitschüppchen ihre Entstehung eher einer gewissen Piëzokontaktmetamorphose, da die gasförmigen und flüssigen Mineralbildner selbst in die kleinsten Poren dieser Tuffe einzudringen vermochten. Auf diese Weise konnte neben dem vorwiegenden Serizite der Tuffpor-

phyroide zu Alsó-Sajó der daselbst auftretende Chloritoid entstanden sein.

Nach Abschluß der vulkanischen Eruptionen brach die Zeit der postvulkanischen Einwirkungen an, und dieser verdankt die in Rede stehende Gegend ihren reichen Gehalt an Erzen. Während bisher, solange bloß von Tonschiefern und serizitischen Schiefern die Rede war, das Auftreten des reichen Erzvorkommens im Szepes-Gömörer Erzgebirge unverständlich erschien (obzwar auch die älteren Autoren dasselbe als epigenetisch bezeichneten), kann man dasselbe nun in anbetracht des einstigen eruptiven Charakters der Schiefer, ohne Zwang auf natürliche Weise durch die Heranziehung der postvulkanischen Erscheinungen erklären.

Nach der Ejektion der festen Gesteinsmassen entströmen den Spalten des Vulkans und seiner näheren Umgebung Gase und Dämpfe, später Thermen, die mineralbildenden Elemente und Säuren, wie Salzsäure, Borsäure, Fluorsäure, Schwefelsäure und Kohlenoxyd, ferner noch bedeutende Mengen von Kieselsäure und verschiedene schwere Metalle enthalten. Diese Prozesse führen teils zur Bildung von Erzgängen, teils aber metamorphisierten sie die von ihnen durchsetzten Nebengesteine.

Diese Vorgänge haben im Szepes-Gömörer Erzgebirge zumeist Erzgänge geliefert. Vor allem sei das Antimonerz erwähnt, welches nach der freundlichen Mitteilung des Herrn Bergdirektors Adolf Trunkó auf einer ungefähr 29 km langen, in ONN-Richtung aus Gömör durch das ganze Szepeser Komitat hindurch bis an die Grenze von Abauj-Torna hin verlaufenden Kluft anzutreffen ist. Dieses bemerkenswerte Vorkommen habe ich in Csúcsom in der Millerschen Grube näher in Augenschein nehmen können.

Die hiesigen Gänge setzen zwischen steil (70—90°) aufgerichteten Porphyroidschiefern auf, und in der Regel findet man deren zwei, die 6—7 m voneinander entfernt sind. Dieselben liefern besonders an den Berührungsstellen 4—5 m mächtige Erzstöcke, wohingegen sie einzeln gewöhnlich bloß die Stärke von einigen Zentimetern bis zu einem Meter besitzen. Diese zwei Gänge halten sich genau an das Streichen der Schiefer, nämlich nach ONO. In ihrem Liegenden finden wir regelmäßig eine gut

zu beobachtende Verwerfung, jenseits welcher wir Porphyroide mit geringerem Einfallen antreffen.

Das Antimoniterz kommt gewöhnlich mit Quarz verwachsen vor, doch hat man stellenweise auch reines Erz gefunden, teils mit strahlig-stengeliger, teils mit feinkörniger bis dichter Struktur.

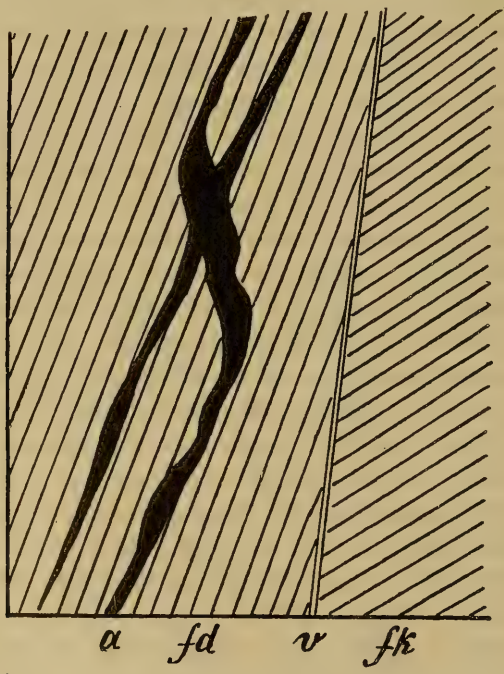


Fig. 3. Geologisches Profil der Millerschen Antimongrube in Csúcsom (zum Teil nach meiner eigenen Aufnahme). *fd* Hangend Porphyroidschiefer, *fk* Liegend Porphyroide, *v* Kluft, *a* schematische Darstellung der Antimonitgänge nach Adolf Trunkó. Einfallen der Hangendschiefer 70°, das der Liegendpartie 40° gen 10—11 Std.

An andern Punkten haben sich vorwiegend Eisen- und Kupfersulfide abgesetzt, wie man dies in den Gruben von Szomolnok beobachten kann. Die Erze vom Szomolnok sind Pyrit und Chalkopyrit, die in Begleitung von Quarz nicht bloß kleinere Linsen zwischen den dortigen Schiefern bilden, sondern auch bedeutendere Stöcke. Drei große Stöcke: Der Hangend-, der Liegend- und der Engelbert-Stock kommen daselbst zwischen den Schiefern vor, die steil unter 60—85° gegen Süden zu einfallen. Zahlreiche dünnere, zumeist Chalkopyrit führende Schnüre begleiten die-

selben. Die großen Pyritstöcke keilen gegen die Teufe zu aus. Anläßlich meines flüchtigen Besuches habe ich an mehreren Punkten auch das Nebengestein in Augenschein genommen, das teils schieferigen Porphyroiden (im Liegenden des Engelbert-Stockes), teils Klastoporphyroiden (im Liegenden des Charitas-Stockes) oder aber selbst echten graphitischen Ton- und Quarzitschiefern entspricht.

Eingehender als dieses Vorkommen habe ich die Eisenspatlagergänge des Ivágyó bei Rozsnyó untersuchen können. Diese

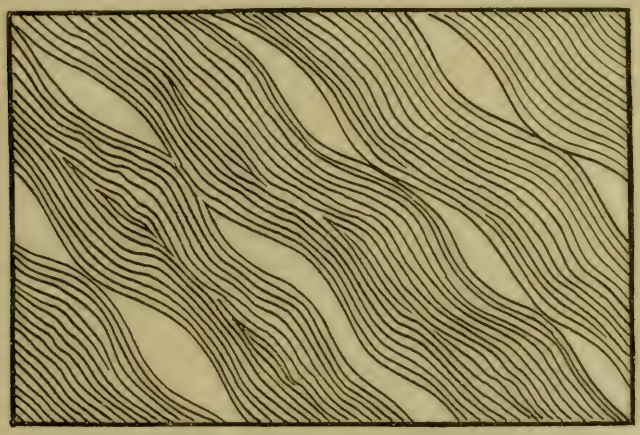


Fig. 4. Entstehung von Hohlräumen im Porphyroidgebirge. In den wellenförmig gefalteten Porphyroidschiefern entstehen durch Rutschung Hohlräume, die zur Aufnahme von Lagergängen geeignet sind.

mehr oder weniger linsenförmigen Lagergänge, welche gegenwärtig reichlich Eisenerze liefern, sind in Nadabula, Rudna und Sebespatak gut aufgeschlossen und zwar überall zwischen typische Porphyroidschiefer eingelagert. Ihrer Bildung sind Faltungen und Dislokationen (Rutschungen) in der Richtung der Schichtung vorangegangen, und man kann ruhig behaupten, daß gerade diese letztern jene Hohlräume geliefert haben, die nachträglich von Spateisenstein ausgefüllt worden sind. Es dürfte genügend gewesen sein, wenn die gewelltschichtigen Porphyroide übereinander bloß um einige Meter verrutschten, denn durch eine solche Bewegung konnten bereits derartige Hohlräume entstehen, die zur Aufnahme von den in Zirkulation befind-

lichen Minerallösungen geeignet waren. Die obenstehende schematische Figur (S. 253) zeigt, daß selbst eine ganz geringe Massenverschiebung tatsächlich derartig flache, linsenförmige, lagergangförmige Hohlräume ergeben haben mußte, auf deren ähnliche Entstehung übrigens in Norwegen früher bereits KJERULF hingewiesen hat.

Derartige zwischen den Schichten eingelagerte Gänge von

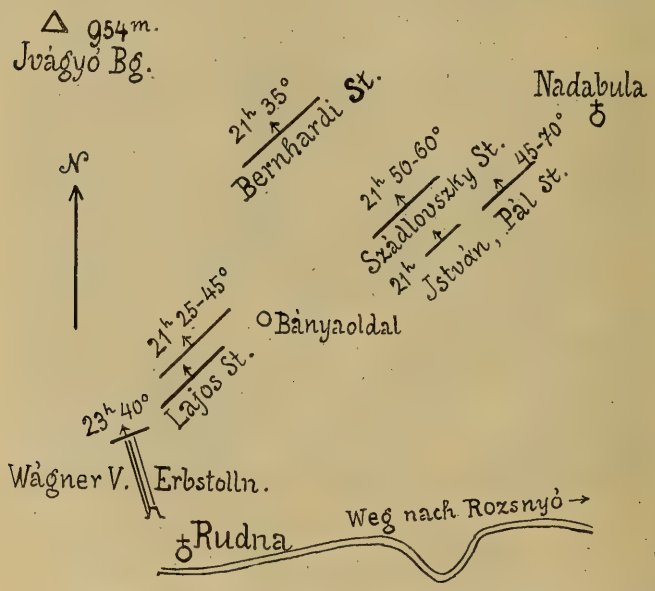


Fig. 5. Das Streichen der Eisenspatgänge am Ivágyó zwischen Nadabula und Rudna (nach den von FERD. KRAUSZ erhaltenen Daten).

diesem Typus kommen in der Porphyroidmasse des Ivágyó mit einer gewissen Regelmäßigkeit vor, und es kann noch hinzugefügt werden, daß dieselben sich zugleich in engem Zusammenhange mit der Tektonik der ganzen Gegend befinden. Dem Bergwerksdirektor Herrn FERD. KRAUSZ verdanke ich es, daß ich die betreffenden Grubenkarten des dortigen Bergbesitzes der Rimamurány-Salgótarjáner Eisenwerks-Gesellschaft in Augenschein nehmen konnte, auf Grund deren ich die beistehende Skizze (Fig. 5) von den Eisenspatgängen am Ivágyó konstruieren konnte. Aus derselben geht hervor, daß besonders der Lajos-Gang von Rudna,

sowie sämtliche Lagergänge von Nadabula das gleiche Streichen besitzen. Das nordöstliche Streichen des Ivágyó ist übrigens jene Richtung, welche um Rozsnyó, bei Pacsa und über den Sattel von Uhorna hinweg weit in das Komitat Szepes hinein zu verfolgen ist, bis es schließlich einem Streichen gen Stunde 6—7 weicht. Von Rudna hingegen nach Sebespatak zu tritt ein nordwestliches Streichen dominierend auf.

Nach dem vorhin Gesagten kehre ich nun wieder zu den Spateisensteingängen zurück. Wenn wir dieselben näher betrachten, fällt vor allem andern auf, daß die die Gänge begleitenden Porphyroidsalbänder in den meisten Fällen zu einem äußerst feinstruierten, lichtgrünen, seidenglänzenden, pintioidartigen Schiefer ausgewalzt sind, offenbar infolge des während der Verrutschung des Gebirges auf sie langsam einwirkenden starken Druckes. Diese gestreckte, beinahe wie verwischt erscheinende Gesteinszone ist kaum 1—2 cm stark, und unter derselben stoßen wir sofort wieder auf normalstruierten Porphyroid. Der Raum des Lagerganges selbst ist nun hauptsächlich von einem grobkörnigen, lichtgelben bis lichtbräunlichen spatigen Siderit erfüllt. Neben dieser Hauptausfüllungsmasse fehlt selten derber milchweißer Quarz, sowie ferner aus der Reihe der nichtmetallischen Minerale die silberglänzenden Häute des Serizites, resp. Muskovites. In andern Fällen erblicken wir in der spatigen Gangmasse große Knollen von kohlschwarzem, derbstengeligen Turmalin. Die Nadeln dieses leztern Minerals sind gleichmäßig von Quarz und Siderit umgeben, woraus auf eine etwas frühere Bildung desselben geschlossen werden kann. So finden wir dies in Rudna und Sebespatak. In Nadabula dagegen, wo der Turmalin bloß in Form von mikroskopisch kleinen Kriställchen vorkommt, gruppieren sich dessen dichte Schwärme mehr an den Rändern der Lagergänge.

Außerdem hat der Spateisenstein auch noch seine metallischen Begleiter und zwar in erster Reihe den Chalkopyrit, ferner den Pyrit, sowie den Tetraëdrit. Ihre Menge ist auf den Lagergängen Ivágyó bloß untergeordnet. Trotzdem pflegt man dieselben, so weit als es möglich ist, auszuklauben und zwar geschieht dies in Nadabula und in Rudna, wodurch einesteils der in die Röst-

öfen gelangende Siderit eine günstigere Qualität erreicht, während man die ausgelesenen Sulfide, namentlich die Fahlerze wegen ihres geringen Silbergehaltes zur weitern Verhüttung nach Selmeczbánya sendet.

Die aufgezählten Mineralien pflegen die Gangräume gewöhnlich ganz auszufüllen, so daß sich in der Regel keine Drusen oder Kristallkammern bildeten. Dennoch gelang es mir ausnahmsweise aus den Bernhardi- und Augusta-Bauen von Nadabula je eine kleinere Geode zu erlangen, die von Siderit-Rhomboëdern ausgekleidet waren und im letztern Falle überdies noch einen ziemlich großen weißen Quarzkristall enthielten.

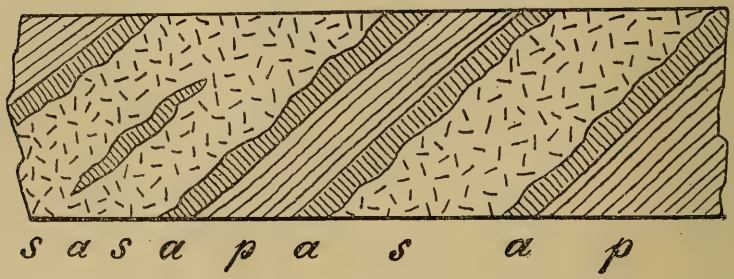


Fig. 6. Die Spateisensteinlagergänge am Mittellauf oberhalb des Karl-Stollens in Nadabula. *p* Porphyroid, *s* Sideritmittel, *a* Aplit. Die Gesamtmächtigkeit der beiden Spateisensteinlager beträgt 4—5 m, das zwischen denselben befindliche Porphyroidmittel ist 0,1 m stark, während die aplitischen Salbänder 0,1—0,5 m Mächtigkeit aufweisen.

Eigentümlich sind ferner noch die Verhältnisse in den Ivágyóer Eisengruben der Rimamurányer Eisenwerks-Gesellschaft, namentlich in dem Untern und Obern Carolus-Stollen. Auf Unter Caroli besteht das Spateisensteinlager aus zwei Fächern, einem Hangenden und einem Liegenden, welche beide unter 35° gen Stunde 21 einfallen. In dem über dem Stollen befindlichen Mittellauf liegt das 2—3 m mächtige Hangendfach zwischen Porphyroidschiefern. Gegen das Liegendfach zu ist dieser Schiefer bloß 1 m mächtig, und unter demselben folgt dann das Liegendfach von ähnlicher Stärke wie das obere. In dem untern Spateisensteinlager findet man nun nicht nur an beiden Salbändern, sondern auch entlang der Mittellinie ein weißes glimmerloses aplitisches Gestein, dessen Bänder sich scharf von den Schiefern des Nebengesteins und

noch mehr vom sideritischen Mittel abheben. Unter dem Mikroskop erkennt man in einer feinkörnigen quarzitischen Grundmasse einzelne größere, mitunter magmatische Resorptionen zeigende Quarzkörner.

In diesem Gesteine wimmelt es dann von Mineralien neuerer Entstehung. Von diesen sei in erster Reihe der wasserklare Albit erwähnt, der nicht nur in der Gesteinsmasse selbst, sondern auch in einzelnen Hohlräumen in Form von aufgewachsenen Kristallen* anzutreffen ist. Ferner Quarz, teils einzelne Äderchen im Gestein ausfüllend, teils in Hohlräumen in winzigen aufgewachsenen Kristallen. Außerdem bemerken wir schwarzen Turmalin in kleinen

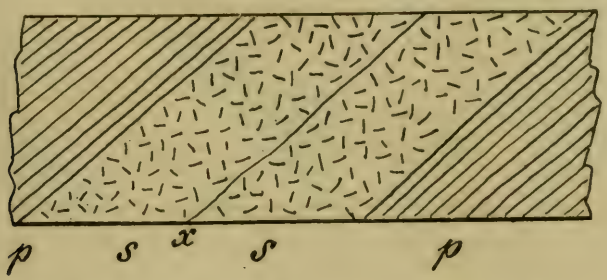


Fig. 7. Die zwei Sideritlager treten miteinander im Obern Karl-Stollen in Berührung. *p* Porphyroid, *s* Siderit, *x* Berührungsfläche zwischen den zwei Lagern. Die gesamte Lagermächtigkeit beträgt 2—4 m.

scharfen prismatischen Kriställchen, ferner Pyrit in kleinen Pentagondodekaëdern, mitunter in ganzen Schwärmen und endlich in einzelnen größern oder kleinern Einzelkristallen, in Gruppen oder Schnüren den bräunlichen Siderit. Dieses eigentümliche Gestein scheint eine Kontaktbildung zu sein, dessen Skelett der ausgelaugte Quarzporphyr geliefert hat, und dessen Hohlräume hierauf von den Neubildungen, wie Albit, zwillingsgestreiftem Plagioklas, ferner Quarz, Turmalin, Pyrit und Siderit wieder ausgefüllt worden sind.

Das Auftreten dieser Fazies ist aus den beistehenden Profilen ersichtlich.

---

* Einige schöne Kristalldrusen habe ich der liebenswürdigen Freundlichkeit des Herrn Univ.-Doz. Dr. Gustav Melczer zu verdanken.

Nichts beweist den wellenförmigen Verlauf der Lagergänge deutlicher als der Umstand, daß sich das zwischen ihnen befindliche Mittel stark verschmälert und schließlich total auskeilt, wodurch die beiden Lagergänge miteinander zu einem verschmelzen (Fig. 7).

An der in Fig. 7 zur Darstellung gebrachten Stelle fehlen die aplitischen Bänder, die aber etwas weiter sofort wieder auftreten. Am Feldorte der Hauptstrecke des Obern Karl-Horizontes werden beide Sideritlager von dem aplitischen Gestein begleitet.

Ich erwähne ferner, daß die beiden Fächer des Sideritlagers

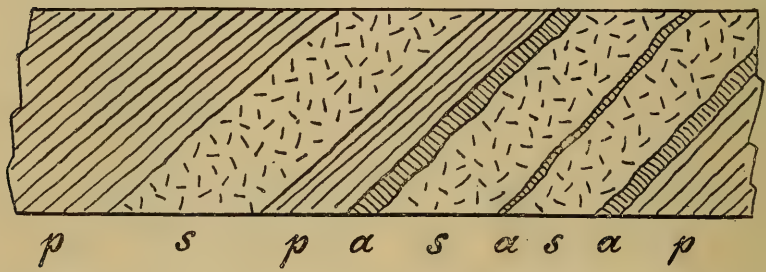


Fig. 8. Die beiden Spateisensteinlager im Obern Karl-Stollen. *p* Porphyroid, *s* Siderit, *a* Aplit. Mächtigkeit des obern Lagers 1,5 m, des untern 1 m; die aplitischen Bänder sind 0,12—0,35 m stark. Das Einfallen der in Fig. 6—8 abgebildeten Schichten ist 35—40° gen 21 Std.

zwischen dem Obern Karl- und dem darüber befindlichen Géza-Horizonte bei einem Einfallen von 25—30° eine Mächtigkeit von 6 + 2,5 m aufweisen; als wir aber von hier aus etwa 50 m weiter gingen, vereinigte sich das Sideritlager derart, daß bei gänzlicher Auskeilung des Siderits am Feldorte die nur noch 0,50 m weite Kluft von den beiderseitigen und hier miteinander in Kontakt tretenden Aplitbändern allein ausgefüllt wurde.

Zwischen den Géza- und Bernhardi-Horizonten habe ich die Mächtigkeit der Spateisensteinlager mit 7 + 3 m beobachtet, auf dem Bernhardi-Stollen selbst dagegen, also auf dem in der Masse des Ivágyó am höchsten gelegenen Horizonte besteht dasselbe Spateisensteinlager aus drei Fächern von einer Gesamtmächtigkeit von 16 m. Diese Daten teile ich hauptsäch-

lich aus dem Grunde mit, weil aus denselben das Anschwellen, sowie auch stellenweise die Verschmälerung der Spateisensteinlager, also im ganzen ihr wellenförmiger Verlauf deutlich hervorgeht.

* * *

Hiermit hätten wir, soweit es in dem engen Rahmen des vorliegenden Berichtes möglich war, die geologischen Verhältnisse der Erzgänge im rozsnyóer Revier zur Genüge beleuchtet. Jedoch darf man nicht glauben, daß das Nebengestein während der Erzbildung durch die pneumatolytisch-hydatogenen Vorgänge gänzlich unberührt geblieben ist. Im Gegenteil ist dasselbe von all den Lösungen durchdrungen worden, welche auch die Erzgänge geliefert haben. Dies wird nicht bloß durch das Auftreten einzelner dünner, die Hauptgänge in kleinerer oder größerer Entfernung begleitender Gangschnüre bewiesen, sondern auch durch das weit in das Nebengestein vor sich gehende Eindringen der gangbildenden Minerale.

Ein derartiges Mineral ist vor allem der *Turmalin*, als beweiskräftiger Zeuge für das einstige Vorhandensein von mineralbildenden Emanationen.

Die Häufigkeit seines Auftretens, sowie die sich hieraus ergebende Menge ist geradezu staunenswert. Am auffallendsten ist sein Auftreten auf den Gängen selbst, woselbst dieses Mineral ziemlich große, schwarze stengelige Aggregate bildet (Rudna, Alsó-Sebes). In andern Fällen häufen sich winzige Turmalinkriställchen an den Rändern der Gänge mit Quarz und Serizit an (Nadabula, Augusta) oder aber mit Albit (Bernhardi-Stollen).

Von den mächtigeren Gangspalten aus wanderte jedoch der Turmalin nicht bloß in das benachbarte Nebengestein, sondern man kann behaupten, in sämtliche Porphyroide und in zahlreiche metamorphe Schiefer ein.

Das nächste Mineral ist der *Siderit*, welches die Gangspalten in sehr reichlicher Weise erfüllt hat. Das Eisenkarbonat hat sich unmittelbar aus den Lösungen ausgeschieden. Die Ausscheidung des einfachen Eisenkarbonats aus dem doppeltsauren kann man in unserm Falle — also in einst tiefgelegenen Hohl-

räumen, weder durch Hinzutreten von atmosphärischer Luft, noch durch teilweise Verdunstung des Lösungsmittels erklären. Es kann dieselbe, unter Annahme der von E. Brauns (Chem. Mineralogie 1896, p. 359) gegebenen Erklärung, bloß durch das Zusammentreffen von aufsteigenden Eisenbarbonatlösungen in den Ganghohlräumen mit der Auslaugung des Nachbargesteins hervorgegangenen kieselsauren Alkalien, also im Wege der Fällung erfolgt sein. Bei diesem Vorgange haben die Alkalien einen Teil der Kohlensäure gebunden, wodurch in Lösung verbleibende und sich mit derselben entfernende Alkalikarbonate entstanden, während sich anderntеils das einfache Eisenkarbonat als Siderit und die freigewordene Kieselsäure in Quarzform als Gangausfüllungsmassen ausgeschieden und abgesetzt haben.

Damit steht in völligem Einklang, daß als häufiges Begleitmineral des Eisenspates tatsächlich der Quarz auftritt.

Sowohl der Siderit, als auch der gleichzeitig entstehende Quarz wanderte mit den Lösungen, sowie wir dies auch bezüglich des Turmalins bemerkt haben, selbst in die entferntesten kleinen Hohlräume und Haarspalten des Nebengesteins, namentlich der Porphyroide. Wir treffen in den Dünnschliffen der meisten Porphyroide, sowie vieler metamorphischer Schiefer stets auch die Eisenspatrhomboëder an, welcher Umstand ein beredtes Zeugnis für die leichte und weithinreichende Beweglichkeit der betreffenden Solutionen abgibt.

Die zuletzt erwähnten Mineralien von pneumatolytisch-hydatogener Entstehung, nämlich der Turmalin und der Siderit, zu welchen sich noch der *Albit*, sowie *Quarz* und *Serizit* hinzugesellten, sind streng verschieden von den eigentlichen Gemengteilen des ursprünglichen Gesteins, nämlich von Orthoklas, Plagioklas, Biotit und Quarz, besonders dadurch, daß an ihnen keine Spur von irgend einer dynamischen Einwirkung zu bemerken ist, sowie daß sie sich selbst nicht immer parallel zur Richtung der Gesteinsschieferung orientiert haben. Auf der Fläche eines und desselben Dünnschliffes kann man mit Leichtigkeit die ältern, dynamischen Einwirkungen ausgesetzt gewesenen Gemengteile der Porphyroide von den Mineralien neuerer Entstehung, welche dynamischen Wirkungen bereits nicht unterworfen waren, unterscheiden.

Hiervon kann man sich auch im großen überzeugen, nämlich daß die Lagergänge selbst, abgesehen von einzelnen lokalen unbedeutenden Verwerfungen, weder in bezug auf ihre Form, noch auch bezüglich der Intaktheit ihrer Ausfüllungsmassen irgendwelche Veränderungen erlitten haben. Und aus diesem Umstande gelangen wir zu dem sehr wichtigen Schlusse, daß die Auffaltung des Szepes-Gömörer Erzgebirges der Erzlagerstättenbildung vorausgegangen sein mußte. Nach Bildung der Erzlagergänge wurde das in Rede stehende Gebirge von keiner bedeutenderen Bewegung mehr betroffen, denn es würde ja die geringste Faltenbewegung nicht nur zur gänzlichen Zermalmung der sehr spröden Sideritmassen, sondern auch der in ihrer Gesellschaft befindlichen Albite, Turmaline usw. geführt haben.

Wenn wir alle bisher angeführten Erscheinungen vor Augen halten, so können wir uns die Entwicklung des in Rede stehenden Gebirges folgendermaßen vorstellen. Die ruhige Lage des das Terrain okkupierenden aus schwarzen Tonschiefern, weißlichen Sandsteinen und dazwischen aus einzelnen Kalksteinschichten bestehenden Komplexes wurde durch tektonische Prozesse gestört. Auf verschiedenen Spalten gelangte hierauf die Quarzporphyrlava und wahrscheinlich noch mehr zerstäubtes Material an die Oberfläche, wo sich dasselbe mit Lavaströmen wechsellagernd in Form von Stratovulkanen anordnete. Den ausgiebigen Lavaergüssen folgten nun bedeutende Einsenkungen, die im Vereine mit andern von uns noch unbekannten Faktoren die Faltung des Gebirges herbeiführten, worauf man aus den zwischen die Porphyroide hineingefalteten metamorphen Schiefern schließen darf. Und es ist wahrscheinlich, daß die Entstehung der Porphyroide nicht nur durch den Druck der aufgestapelten vulkanischen Massen, sondern zum großen Teil auch durch den Faltungsprozeß hervorgerufen worden ist. Aus der letzten Phase der Faltung verblieben hierauf die entlang der Schichtung der Porphyroide befindlichen Hohlräume, die dann in der darauffolgenden Periode durch die Thermalquellenwirkung von Erzen ausgefüllt wurden. Seither wurde dann unser Gebirge von keiner weitern Faltung mehr betroffen, und so kam es, daß das Szepes-Gömörer Erzgebirge durch lange geologische Zeiträume hindurch bis auf

unsere Zeit unverändert, als ein wahres Massiv des ungarischen Oberlandes dagestanden hat.

Es wäre nunmehr nur noch das geologische Alter der im Vorstehenden besprochenen Quarzporphyre zu erörtern. Damit sind wir aber in der ganzen Sache in dem kritischesten Punkte angelangt. Soviel ist sicher, daß die Quarzporphyr-Eruption jünger ist, als die im Szepes-Gömörer Erzgebirge mit denselben gemeinschaftlich vorkommenden graphitischen Schiefer, serizitischen Quarzite und einzelne Kalksteinschiefer es sind. Es geht dies nicht bloß daraus hervor, daß die Porphyr-Eruption das aus den angeführten Gesteinen bestehende Grundgebirge im wahren Sinne des Wortes metamorphosiert hat, sondern auch aus den mitunter in den Quarzporphyroiden anzutreffenden graphitischen Schiefereinschlüssen (Rudna, Wagner Vilmos-Erbstollen). In Beziehung auf diese metamorphen Schiefer ist daher das Alter der Quarzporphyre entschieden jünger.

Die weitern Schlüsse hängen nun bloß von der Erkenntnis des geologischen Alters dieser Schiefer ab. In bezug auf diese fehlen uns jedoch zur Zeit unzweifelhaft verläßliche Anhaltspunkte.

In dieser Hinsicht sind wir bloß auf gewisse Analogien angewiesen. Wir wissen nämlich, daß in Dobsina in ganz ähnlicher petrographischer Ausbildung Tonschiefer, Quarzitschiefer und Kalksteine vorkommen, wie auf unserm Gebiete (Csúcsom u. a.). Dieselben sind nach der Darstellung von W. Voit* in ähnlicher Weise metamorphosiert (nur dort durch Diorit) wie die unserigen. Bei Dobsina liegen die Verhältnisse insofern günstiger, als daselbst in den Kalken dieses Schichtenkomplexes organische Reste enthalten und schon seit langer Zeit her bekannt sind**, welche das karbonische Alter derselben (am meisten dem karinthischen Ober-Karbon vergleichbar) außer allen Zweifel setzt.

* W. Voit, Schilderung der Lagerstättenverhältnisse von Dobschau, *Jahrb. der k. k. geol. R.-Anst.* 50. Bd. Wien 1900.

** Fr. Ritter v. Hauer, Erläuterung zur geol. Übersichtskarte d. österr.-ungar. Monarchie, Bl. III Wien 1869 p. 509 und v. Andrian, Bericht etc., Jahrb. d. k. k. geol. R.-Anst. 1859 p. 553. Die Petrefakte, die von Eduard Suess bestimmt wurden, sind folgende: *Receptaculites Oceani,* Eichw.; *Productus fimbriatus,* Sow.; *Camerophoria Kissi,* Suess.

Wenn wir daher in Ermangelung anderer Beweise annehmen, daß die metamorphen Kalke und Tonschiefer in der Umgebung von Rozsnyó ebenso wie die von Dobsina, karbonisch sind, so muß dann die Eruption der Quarzporphyre notwendigerweise jünger als diese, daher wahrscheinlich permisch sein.

In wie weit endlich die Quarzporphyre mit den in der weiteren Umgebung vorkommenden Granitstöcken (Szulova, Kohut) zusammenhängen, konnte ich zurzeit nicht in den Bereich meiner Untersuchungen ziehen, in Zukunft aber werden wir unser Augenmerk auch auf diesen Umstand hinlenken müssen. Überhaupt halte ich meinen vorliegenden Bericht durchaus nicht für eine ganz abgeschlossene Sache, sondern bloß als einen Fingerzeig darauf hin, worauf bei den künftigen geologischen Untersuchungen im Szepes-Gömörer Erzgebirge das Hauptgewicht zu legen wäre. Trotzdem fasse ich die Ergebnisse meiner bisherigen Beobachtungen in folgenden Punkten zusammen:

1. Die früher als Tonschiefer, Karpatengneise u. a. angesprochenen Gesteine des Szepes-Gömörer Erzgebirges sind auf Grund meiner Untersuchungen Quarzporphyre, Porphyroide, Klastoporphyroide und endlich metamorphe Sedimente.

2. Die im Szepes-Gömörer Erzgebirge, namentlich in der Umgebung von Rozsnyó befindlichen reichen Erzlager sind epigenetischen Ursprungs und können auf die postvulkanischen Einwirkungen der Quarzporphyr-Eruption zurückgeführt werden.

* * *

Es sei mir schließlich gestattet, allen den Herren, die mich bei dieser Arbeit in einer oder der andern Richtung zu unterstützen die Freundlichkeit hatten, auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen und zwar dem Kgl. Bergrat Vendelin Bránszky, den Herren Bergdirektoren Ferdinand Krausz und Adolf Trunkó in Rozsnyó, den Herren Bergwerksdirektor Victor Lajos und Bergingenieur Julius Wick in Szomolnok. Ferner dem Herrn Universitätsprofessor Dr. Victor Uhlig in Wien für die freundliche Überlassung des von ihm gesammelten einschlägigen Materials, den Herren kgl. ungar. Sek-

tionsgeologen Dr. THEODOR POSEWITZ und Bergingenieur EUGEN REGULY in Budapest, die mir aus ihren reichen Aufsammlungen ebenfalls zahlreiche Handstücke vorgelegt haben und endlich dem Herrn Privat-Chemiker Dr. EDMUND ERNYEI für die Ausführung der mitgeteilten chemischen Analysen, sowie auch dem Herrn Chemiker der ungar.-geol. Anstalt, Dr. KOLOMAN EMSZT, der die Freundlichkeit hatte, in einigen Fällen Kieselsäurebestimmungen zu unternehmen.

11.

DIE BEDEUTUNG DES DIVERTICULUM TOMES-ZSIGMONDYI, DES CINGULUM AN DEN OBEREN LATERALEN SCHNEIDEZÄHNEN UND DES FORAMEN COECUM MOLARIUM (MILLERI) IN PHYLOGENETISCHER BEZIEHUNG.

Von Prof. Dr. JOSEF ÁRKÖVY.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 10. Novbr. 1903.

Auszug aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö" (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Bd. XXII, pp. 21—28.*

Im Juli-Heft 1903 der „Österr.-ungar. Vierteljahrsschrift für Zahnheilkunde" veröffentlichte Dr. Otto Zsigmondy (Wien) eine kleine Arbeit: „Über die Entstehung der Fissuren in der die Kauflächenfurchen überkleidenden Schmelzdecke bei Prämolar- und Molarzähnen". Es ist klar, daß es sich hier um eine Schmelzfalte handelt, welche sich ganz nahe an die Dentingrenze, zuweilen auch unmittelbar an sie heran verfolgen läßt. Die kolbenartige Verbreiterung, welche die Fissur in typischen Fällen erfährt, im Anschlusse an den entwicklungsgeschichtlichen Vorgang, kennzeichnen diese vermeintliche Fissur als ein *Diverticulum*.

Eine Angabe Zsigmondys mußte jeden Fachmann überraschen; nämlich das Vorkommen dieses Diverticulums in 80 Prozent der untersuchten Fälle. Es entstand bei mir der Gedanke, daß dieser hohe Prozentsatz kein Zufall sei, und da ein Diverti-

* Ausführlich deutsch erschienen in der Österr.-ungar. Vierteljahrsschrift für Zahnheilkunde. XX. Jahrgang (1904), pp. 1—22, mit 6 Tafeln.

culum ja doch nicht zur Vollständigkeit eines Organes gehört, sondern vielmehr einen Defekt darstellt, so mußte gefolgert werden, daß dieser Defekt im Laufe der Zeit durch irgend eine Veranlassung zustande gekommen sei. Der Aufschluß über diese Frage mußte an anthropologischem Material gesucht werden, in der Richtung, ob dieses Diverticulum vor vielen Jahrhunderten bereits bestanden habe oder ob es erst jüngeren Datums sei.

Prof. Aurel v. Török, Direktor des anthropologischen Institutes in Budapest, hatte die Gefälligkeit, mir seine ganze Sammlung zur Verfügung zu stellen, und ich habe mit Hilfe des Herrn Dr. Béla Wallheim (klinischen Praktikanten)* das verwendbare Material untersucht. Beiden genannten Herren spreche ich hiermit meinen verbindlichsten Dank aus. Bereits am ersten Tage ist mir bei der Untersuchung der ältesten — 1000 bis 1600 Jahre alten — Schädel ein Umstand aufgefallen, von dessen Existenz ich keine Ahnung hatte: abgesehen vom Diverticulum, welches das Hauptaugenmerk in Anspruch nahm, war es höchst auffallend, daß an den oberen lateralen Schneidezähnen nur hie und da ein entwickeltes Cingulum, ja statt dessen im Gegensatze sogar eine Erhabenheit vorhanden war, während an den Molaren nur ganz vereinzelt ein Foramen coecum beobachtet werden konnte.

Um die Begriffe klar vor Augen zu haben, finde ich es für angezeigt, sowohl über das Cingulum als auch über das Foramen coecum einige Bemerkungen zu machen.

Das *Cingulum* ist eine Schmelzfalte, welche sich an der lingualen Fläche, speziell des Incis. lat. sup. von beiden Seiten gegen die Achsenlinie hinzieht und einen scharfen Winkel bildet, in dessen Tiefe sodann ein Foveola (Zuckerkandl) zur Entstehung gelangt. Ohne Schmelzfalte gibt es keine Foveola; diese ist also durch die Schmelzfalte bedingt. Man findet diese Bezeichnung, nämlich „Cingulum“, in Ch. Tomes' „Dental Anatomy“ als eine den Odontographen geläufige verzeichnet.**

* Um Irrtümern vorzubeugen, habe ich das Material mit dem genannten Herrn gemeinschaftlich geprüft.

** Ch. S. Tomes: A Manual of Dental Anatomy human and comparative. London, Churchill, 1876.

Das *Foramen coecum* findet sich an den buccalen Wänden der Molaren vor. Es ist der Endpunkt eines Sulcus, welcher sich zwischen den mesio-labialen und labio-distalen Höckern cervikalwärts hinzieht. Die Lage des Foramens selbst entspricht zumeist der Mitte, zuweilen dem oberen Drittel der Kronenlänge. — Die erste Erwähnung eines Foramen coecum findet man in W. D. MILLERS „Mikroorganismen der Mundhöhle", I. Aufl., Leipzig 1889. — Man wird also wohl richtig vorgehen, wenn man die Bezeichnungen folgendermaßen auseinander hält. Das vielfach als Foramen coecum benannte „Grübchen" in der Mitte des Cingulums möge man nach ZUCKERKANDL *Fovcola* des Cingulums, ein charakteristisches Merkmal des oberen lateralen Schneidezahnes, nennen; den Sulcus und das Grübchen aber, welches an den Molaren vorkommt, bezeichne man als *Foramen coecum* (MILLERI). Wir haben diese Unterscheidung bereits im Titel und im Laufe dieser Abhandlung durchgeführt.

Untersucht wurden insgesamt 169 Schädel, zum größten Teile aus dem anthropologischen Institut zu Budapest, und zirka je 20 aus dem ersten anatomischen Universitätsinstitut und aus dem zahnärztlichen propädeutischen Institut zu Budapest.

Die Untersuchung des Diverticulums wurde nach Anfertigung eines sagittalen Durchschnittes an zumeist oberen Prämolaren*, die des Cingulum und Foramen coecum, durch gewöhnliche äußere Beaugenscheinigung vorgenommen.

Die Untersuchungsergebnisse sind folgende:

I. *Diverticulum* [Prämolarium]. Das Vorhandensein des Di-

* Die Molaren sind, da sie sehr alt und morsch waren, fast alle unter der Einwirkung der elektrischen Sägemaschine zerborsten. Die Prämolaren hielten sich besser. Auch war das Augenmerk vielmehr auf diese gerichtet. — Nachträglich fand ich bei WIEDERSHEIM eine gewisse Billigung meines Vorgehens, indem dieser Autor den Prämolartypus bereits als eine Reduktionsform hinstellt: „Von hohem Interesse ist die Tatsache, daß, während die definitiven Prämolarzähne des Menschen relativ einfach gestaltet sind, ihre Vorläufer, d. h. die Milchmolaren, eine ungleich kompliziertere Form besitzen. Sie ähneln vielmehr den Molaren des Erwachsenen und man ersieht hieraus, daß die Milchmolaren von primitiverem, d. h. weniger reduziertem Typus sind, als die betreffenden Ersatzzähne." (WIEDERSHEIM: „Der Bau des Menschen", III. Aufl., pag. 174.)

verticulums ist nur an den rezenten Schädeln, respektive Zähnen, mit freiem Auge zu konstatieren; darum mußten wir photographische Aufnahmen mit dreifacher Vergrößerung machen, und selbst an diesen konnte das Diverticulum an aus alter Zeit stammenden Zähnen, wenn es überhaupt vorhanden war, nur mit Hilfe einer Lupe konstatiert werden. Aus den von uns gewonnenen Daten läßt sich die Entwicklung des Diverticulums bis auf die älteste Zeit zurückführen. Es findet sich verhältnismäßig seltener an Zähnen, die aus einer älteren Zeit stammen, als an Zähnen unserer Zeitperiode; es zeigt sich auch an Zähnen unserer Zeit, wenn es überhaupt vorhanden ist, viel ausgesprochener und evidenter.

Nach den entwicklungsgeschichtlichen Vorgängen (ZSIGMONDY) zu urteilen, sollte eine Verschmälerung der Kronenbreite der Prämolaren (oberen) in sagittaler Richtung die Begleiterscheinung des Auftretens des Diverticulum sein. Die Besichtigung und der Vergleich alter Schädel mit rezenten machen tatsächlich den Eindruck, als würden die alten und sehr alten Prämolaren breiter gewesen sein. Leider sind die vorgenommenen Winkelmessungen wegen vielfältiger Abrasion an den Schmelzhöckern resultatlos geblieben, und infolgedessen konnte man die sichtlich wahrgenommene Intercuspidatdifferenz nicht zahlenmäßig konstatieren.

Die Fragen, zu welchem Zeitpunkte das Diverticulum überhaupt noch nicht vorhanden war oder bei welchen, ein rohes Leben führenden Völkern es auch heute noch nicht zum Vorschein gekommen ist — Maori, Papua etc. — kann ich mangels eines einschlägigen Materials nicht beantworten. Es ist aber wahrscheinlich, daß die Entwicklung des Diverticulum, Cingulum und Foramen coecum stufenweise zustande gekommen ist, und zwar in dem Grade, als die Lebensweise der betreffenden Völker sich raffinierter gestaltet hatte.

Das Diverticulum fehlte dreimal an 8 Prämolaren aus der Römerzeit, zweimal an 3 Prämolaren aus der Zeit der Völkerwanderung, einmal an 3 Prämolaren von Avaren, zweimal an 2 Prämolaren aus der Zeit Andreas' I, zweimal an 4 altungarischen Prämolaren und zweimal an 4 Prämolaren, die aus dem Anfange des XIX. Jahrhunderts stammten.

II. *Cingulum* [Incis. lat. sup.]. Bezüglich des Cingulum haben wir positiver ausgesprochene Daten erhalten, indem in den Prozentzahlen seines Vorkommens eine graduelle und konstante Steigerung zu konstatieren ist. So ist seine Zahl bei Römerschädeln (200—300 p. Chr.) noch 0 Prozent: zur Zeit der Völkerwanderung (600—700) 25·34; bei den Avaren (700—800) 39·28; zur Zeit Andreas' I. (1046—1061) 53·33; an altungarischen Schädeln (1555—1668) 52·94; an Budapester Schädeln vom Anfang des XIX. Jahrhunderts 70·26; an rezenten Schädeln 94·59. So fehlt es auch bei den ein rohes Leben führenden Stämmen (Maori, Neger): es ist hingegen bei Kulturvölkern deutlich entwickelt.*

III. *Foramen coecum* [molarium]. Die Prozentzahlen bezüglich des Foramen coecum zeigen ein seltenes Vorkommen an den oberen und ein häufigeres Vorkommen an den unteren Molaren.

Die Einzelheiten ergeben die folgenden Prozentzahlen: Römer obere Molaren 1·66 Prozent, untere Molaren 0 Prozent (geringes Material); aus der Zeit der Völkerwanderung obere 7·31, untere 16·66; bei Avaren obere 0, untere 10; aus der Zeit 1046—1061 (Andreas I.) obere 0, untere 5·88; an altmagyarischen Schädeln obere 4·40, untere 14·28; an Budapester Schädeln vom Anfang des XIX. Jahrhunderts obere 6·66, untere 44·89; bei rezenten Schädeln obere 8·33, untere 32·50. Aus diesen Zahlen ist die fortwährende Vermehrungstendenz des Foramen coecum zu ersehen. Dasselbe ist in bezug auf die Schädel der verschiedenen Rassen und Stämme, insofern als von roher oder raffinierter Lebensweise die Rede sein kann, zu bemerken. So kommt das Foramen zum Beispiel an den Molaren der Maori, Malayen, Neger oder Eskimos nicht vor und tritt in beträchtlicher Zahl bei den Chinesen (14 Prozent) oder Altgriechen (beide Kulturvölker) auf.

---

* Der inc. lat. des linken Oberkiefers des diluvialen Menschen von Krapina mit seiner, nebenhöckerartigen, stark prominenten Konvexität an der Stelle des Cingulum, bestätigt auch die hier niedergelegten Befunde bezüglich des Cingulum. [Dr. Carl Gorjanović: „Der paläolithische Mensch und seine Zeitgenossen aus dem Diluvium von Krapina in Kroatien". — Mitteilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien. Bd. XXXI u. XXXII.

Resumé:

1. Auf Grund der angeführten Angaben sollten das Diverticulum, das Cingulum mit der Foveola und das Foramen coecum in die Reihe der Schmelzhypoplasien aufgenommen werden, jedoch mit der Unterscheidung, daß diese phylogenetische Hypoplasien darstellen, während die bisher bekannten übrigen als pathologische Hypoplasien zu gelten hätten. Die Begründung einer solchen Unterscheidung liegt auf der Hand, da die letztere Art ihr Entstehen irgend einem pathologischen Prozesse (exanthematische Erkrankungen, Eklampsie, Rhachitis, Syphilis) verdankt, die erstere Art hingegen von pathologischen Einflüssen ganz unabhängig sich entwickelt; jene Entwicklungsveränderung entsteht ontogenetisch, diese phylogenetisch.

2. Entwicklungsgeschichtlich bedeuten alle drei Erscheinungen — Diverticulum, Cingulum, Foramen coecum — das Zustandekommen einer Schmelzfalte, in deren Tiefe der Schmelz auf eine minimale Schichte beschränkt wird oder sogar ganz und gar fehlt, wodurch eine kleine Dentinfläche bloßgelegt wird. Im pathologisch-anatomischen Sinne bedeuten sämtliche Erscheinungen einen passiven ätiologischen Faktor, d. h. eine widerstandsschwache Prädispositionsstelle für Karies.

Phylogenetisch betrachtet — insofern von einer Phylogenetik überhaupt die Rede sein kann, wenn sich Angaben auf einen Zeitraum von nur 1500 bis 1600 Jahren und auf die anthropoiden Affen stützen — sind die geschilderten Erscheinungen in erster Linie Veranlassungen zur Erkrankung, aber sie scheinen gleichzeitig eine Verkümmerung mindestens im strukturalen Sinne zu bedeuten, deren Endresultat das endgültige Ausbleiben, den Ausfall des Organes darstellt, wie dies das Beispiel des Incis. lat. sup. zeigt. Demgemäß scheint es offenbar zu sein, daß sowohl das Cingulum als das Diverticulum und auch das Foramen coecum als Erscheinungen der Reduktion der Zähne angesehen werden dürfen.

3. Das Diverticulum Tomes-Zsigmondyi ist offenbar älteren Datums, als das Alter des historischen Menschen; es kommt erst zu Anfang des XIX. Jahrhunderts zur allmählichen Entwicklung; seine volle Entwicklung fällt in die Neuzeit.

4. Das Cingulum (Incis. lat. sup.) war durchaus nicht ein integrierender Bestandteil der Urform des lateralen Incisivus, da bei den anthropoiden Affen an dessen Stelle eine Konvexität, nicht aber eine Schmelzfalte und eine Foveola konstatiert werden kann. Es fällt aber gänzlich hinweg oder es kommt nur sporadisch bei wilden Stämmen oder bei Völkern, die eine rohe Lebensweise führen, vor. Wenn man auch das erste Auftreten des Cingulum nachzuweisen nicht imstande ist, so macht sich dessen graduelles Auftreten doch in jenem Verhältnisse bemerkbar, in welchem man sich der Gegenwart nähert.

5. Das Foramen coecum [molarium] ist eine Eigentümlichkeit der Kulturvölker. Es war in alten Zeiten niemals ein Bestandteil der Molarenform, indem es bei anthropoiden Affen nicht einmal in Spuren vorkommt; es fehlt aber auch bei Urvölkern, welche ihre rohe Lebensweise beibehalten haben. Sein Auftreten ist höchst wahrscheinlich neueren Datums, da es 700—1686 n. Chr. nur in 5, 10 bis 14 Prozent vorkommt, ja selbst in rezenten Schädeln kaum 32·50 Prozent übersteigt.

Das erste Stadium seines Auftretens kennzeichnet sich durch die Sulcusentwicklung und erst in erheblich späteren Zeitläuften kommt der Sulcus mit dem Foramen coecum zur Beobachtung.

12.

ÜBER DEN ARAGONIT VON ÚRVÖLGY.

Von Dr. G. MELCZER.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 20. April 1903.

Auszug* aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítő“ (Mathem. u. Naturwissensch. Anzeiger der Akademie) Bd. XXI, pp. 236—254.

Verfasser beschäftigt sich in dieser Arbeit mit den Formen, dem Achsenverhältnis, der Zwillingsbildung und den Brechungsindices dieses bekannten, jedoch noch nicht eingehend untersuchten Vorkommens. Er fand durch Messungen an teils einfachen, teils Zwillingskristallen mit gut ausgebildeten Flächen folgende *Formen*:

c {001}	x {012}
m {110}	k {011}
n {122}	l {032}
s {121}	i {021}
p {111}	v {031}
o {112}	b {010},

ferner als schmale, weniger gut reflektierende Flächen weitere 23 Formen, von welchen {540} und {970} als sicher bestimmte, {0·11·6}, {0·15·8}, {0·16·5}, {0·17·2}, {091}, {0·16·1}, {0·17·1}, {0·19·1}, {0·21·1} als wahrscheinliche angesehen werden können. Das *Achsenverhältnis* wurde durch Messungen von dreierlei Winkeln (zusammen 45 Winkel) an 14 kleinen einfachen Kristallen zu

* Ausführlich deutsch erschienen in der *Zeitschrift für Kristallographie*, XXXVIII. Mit 1 Tafel und 15 Textfiguren.

$$a : b : c = 0{,}6217 \pm_{0{,}0002} : 1 : 0{,}7207 \pm_{0{,}0002}$$

bestimmt. Aus dem Vergleich mit den von andern Autoren an andern Aragoniten bestimmten Achsenverhältnissen ersieht man, daß der von Úrvölgy eine etwas kürzere a-Achse hat als jene.

Verfasser formuliert sodann die beiden Ausdrücke für das Zwillingsgesetz des Aragonites und bestätigt dasselbe durch an vier Kristallen gemessene Zwillingswinkel. Bezüglich der Benennung der *Zwillinge* hebt er hervor, daß es notwendig ist — wie es schon LEYDOLT tat — Partikeln derselben Stellung, auch wenn sie räumlich getrennt sind, als ein Individuum zu betrachten. Verfasser findet auf Grund seiner Beobachtungen, daß die kleinen Zwillingskristalle meist Zwillinge und Drillinge, und zwar selten nur Juxtapositions-, sondern meistens zugleich Penetrationszwillinge von einem, zweien oder allen drei Individuen sind. Mehr als drei Individuen fand Verfasser nur an den größeren, oft mehrere Zentimeter dicken Zwillingskristallen.

Verfasser hat auch die *Brechungsindices* für die Lichtarten H_α, Na und H_γ an sieben Kristallen durch Messung der minimalen Ablenkung bestimmt, da sich die bisherigen Beobachtungen nur auf Biliner Material beziehen. Die Differenzen, betreffend die Lichtbrechung, sowie die Doppelbrechung und die Dispersion der einzelnen Kristalle betragen einige wenige Einheiten der vierten Dezimale; als Mittel folgt:

Lichtart	α	β	γ
C	1,5275	1,6765	1,6807
D	1,5295	1,6805	1,6848
F	1,5340	1,6894	1,6941.

Vergleicht man diese Daten mit den von RUDBERG, GLAZEBROOK, DANKER, PULFRICH, MÜHLHEIMS und OFFRET an Biliner Aragonit bestimmten Werten, so ersieht man, daß der Aragonit von Úrvölgy eine etwas kleinere Lichtbrechung besitzt als der von Bilin, bezüglich der Doppelbrechung und Dispersion sind jedoch die Differenzen so klein, daß sie als Beobachtungsfehler angesehen werden können.

13.

DIE FOSSILEN FISCHE DES BEOCSINER ZEMENTMERGELS.

Von Dr. ANTON KOCH.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 16. Februar 1903.

Auszug* aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Mathem. u. Naturwissensch. Anzeiger der Akademie) Bd. XXI, pp. 190—195.

Der Inhalt dieser Abhandlung ist kurz folgender:

A) Aus dem Zementmergel, welcher die tiefere und Hauptmasse des großen Mergelbruches von Beocsin (Syrmien, Nordfuß des Fruskagoragebirges) bildet, und seiner Molluskenfauna nach dem unteren Horizonte der Pannonischen oder Pontischen Stufe angehört, werden die Reste folgender Fischarten, nebst einer Landschildkröte beschrieben und abgebildet: a) aus der Ordnung Anacanthini, Fam. Gadidae zwei große Arten und zwar 1. *Gadus (Merlungus) pannonicus* n. sp. 2. *Brosmius Strossmayeri Kramb. Gorj.*; b) aus der Ordnung Acanthopterygii, Fam. Sphyraenidae 3. ein reptilartiger großer Raubfisch *Sphyraenodus hexagonalis* n. sp.; dann aus der Fam. Percidae: 4. *Serranus* sp. ind. und 5. *Lates pliocaenus* n. sp.

Außer diesen fand sich auch ein großer Pflasterzahn von *Gyrodus* sp., der aber aus irgend einer tieferen Schicht des Fruskagoragebirges eingewaschen wurde. Endlich wurden Reste einer Landschildkröte als *Testudo syrmiensis* n. sp. beschrieben. Aus

---

* Ausführlich deutsch erschienen in den *Annales Musei Nationalis Hungarici* 1904, pp. 35—72. Mit 8 Tafeln und 2 Textfiguren.

dieser kleinen Fischfauna werden schließlich Schlußfolgerungen auf die Bildungsverhältnisse des Beocsiner Zementmergels abgeleitet.

B) In dem ca. 20 m mächtigen schlammigen Sandlager im Hangenden des Zementmergels, welches seiner Molluskenfauna nach den oberen Horizont der Pannonischen Stufe bildet, fand sich ein einziger Pflasterzahn von *Pycnodus* sp., welcher ebenfalls aus einer älteren Schicht des Gebirges eingewaschen wurde.

C) Aus dem Lignitflötze enthaltenden Paludinenton des nahen Cserevicser-Tales, welcher nach seiner Molluskenfauna die untere levantinische Stufe vertritt, werden Reste von Süßwasserfischen besprochen. Es sind dies: a) Hundezähne und Wirbelkörper von einer *Esox* sp.; b) ferner Schlundzähne und Wirbelkörper von *Cyprinus* und *Barbus*-Arten, welche näher nicht bestimmt werden konnten. Es ergibt sich daraus, daß in der Zeitperiode der levantinischen Stufe die südlichen Teile Ungarns durch Süßwasser bedeckt wurden.

14.

ÜBER DEN DURCHGANG VON HERTZSCHEN WELLEN DURCH ELEKTROLYTE.

Von IRENÄUS KÁROLY.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 16. Mai 1904.

Die ebenen elektromagnetischen Wellen pflanzen sich ungeschwächt in den vollkommenen Isolatoren fort, erleiden jedoch eine Schwächung beim Durchgang durch Leiter; die Energie der Wellen geht dabei in JOULEsche Wärme über.

Die Grenztiefe, bis welche die HERTZschen Wellen in die Metalle eindringen können, wurde auf experimentellem Wege von BJERKNES* untersucht. Er fand, daß das Extinktionsvermögen der Metalle — der MAXWELLschen Theorie entsprechend — mit dem Leitungsvermögen und Magnetisierung zunimmt. Diese Tiefe ist jedoch sehr gering, ungefähr 0,01 mm und ist umso kleiner je schneller die Wellen schwingen. Das Grundprinzip seiner Messungen ist die mittels eines Elektrometers beobachtete Resonanz der verschiedenen Metalle. DRUDE** fand auf theoretischem Wege beinahe dasselbe Resultat.

J. J. THOMSON, J. STEFAN*** und NORDMANN bemühten sich das Verhältnis des Leitungs- und Absorptionsvermögens bei Elektrolyten experimentell zu bestätigen, um die Flüssigkeitsschicht zu bestimmen, durch welche die elektrischen Wellen noch durch-

* V. BJERKNES, *Wied. Ann.* 47, p. 69, 1892 und *Wied. Ann.* 48, p. 592, 1893.

** DRUDE, *Physik des Äthers* p. 480 u. 576.

*** *Wied. Beibl.* 13, p. 727; J. J. THOMSON, *Proc. Roy. Soc.* 45, p. 288, 1889.

dringen können. J. J. THOMSON* legte die Elektrolyte zwischen seinen kreisförmigen Vibrator und Resonator und untersuchte die Schichtdicke, die eben genügt, um den Funken des Resonators auszulöschen. Aus seinen experimentellen Angaben folgert er, daß die verschiedenen Schichtdicken, die noch die Wellen durchlassen, mit dem spezifischen Widerstand der Flüssigkeiten proportional sind. Wird das Durchlaßvermögen der verschiedenen Elektrolyten mit dem der Schwefelsäure (Dichte = 1,175) gemessen, deren 3—4 mm dicke Schicht noch Wellen durchläßt, so ist das Durchlaßvermögen des NH_4Cl (Dichte = 1,072) 1,53, des NaCl (1,183) 2,55, des KCl (1,55) 3,0, des NH_4NO_3 (1,173) 1,8, des K_2CO_2 (1,280) 3,2.

Nach den interessanten Versuchen von BRANLY** wurde der Kohärer von mehreren Forschern*** dazu benutzt, die Schwächung der Intensität der Wellen, die durch Elektrolyten gehen, auszuweisen. NORDMANN† hat dabei den Kohärer zuerst als Meßapparat angewandt. Er setzt den aus Goldpulver verfertigten Kohärer in die Mitte eines Quecksilber enthaltenden Holzgefäßes (später über das Quecksilber, dann aber durch eine Metallhülse bedeckt). Das eine Ende des Kohärers tauchte in das Quecksilber, das andere Ende ging in einen isolierten Draht durch das Quecksilber; von der Oberfläche des Quecksilbers ab, worauf das zu untersuchende Elektrolyt geschichtet war, steigt der Draht schon ganz blank lotrecht bis zu einer Höhe von 1,5 m in die Luft, um die 1—2 cm weit von ihm entstehenden Wellen zu empfangen, welche so nur durch die Flüssigkeit sich bis zum Goldpulver fortpflanzen können. Es sucht bei dieser Anordnung jene Dicke der Flüssigkeitsschicht, bei welcher die durchgedrungene Welle noch den Widerstand des Kohärers zu verkleinern vermag.

Er findet dabei, daß die durchlassende Dicke der verschie-

---

* *Wied. Ann.* 41, p. 400, 1890.

** BRANLY, *Paris C. R.* p. 785, 1890.

*** Bei DRUDE, J. KÁROLY diente der Kohärer mehr zu Demonstrationszwecken als zu Messungen.

† NORDMANN, *Paris C. R.* CXXXIII p. 339, 1901 und C. R. CXXXIV p. 417, 1902.

denen Elektrolyten mit der Abnahme des spezifischen Leitvermögens der Flüssigkeit zunimmt; diese Zunahme ist jedoch der Abnahme des Leitvermögens nicht proportional, sondern kleiner.

Die Resultate seiner Experimente sind folgende:

	E	$\frac{1}{R}$
H_2SO_4 (bei d. Max.-Leitvermögen 369 gr pro Liter)	5 mm	0,73
NaCl (gesättigte Lösung)	18 „	0,21
KCl (Normallösung, 74,54 gr pro Liter)	32 „	0,098
$MgSO_4$ (bei d. Max.-Leitvermögen 424 gr pro Liter)	41 „	0,049

E bedeutet die Grenztiefe, die die Welle in der Flüssigkeit erreichen kann; $\frac{1}{R}$ das Leitungsvermögen (bei Quecksilber 10690).

In der zweiten Abhandlung, welche die Untersuchung von normalen und verdünnten Lösungen von KCl enthält, bestätigt er seinen in der ersten Abhandlung begründeten Standpunkt. Die Resultate dieser neuen Messungen sind folgende:

	E	$\frac{1}{R}$
KCl (Normallösung)	32 mm	0,098
$\frac{1}{10}$ Normallösung	175 „	0,0119
$\frac{1}{50}$ „	494 „	0,00239
$\frac{1}{100}$ „	804 „	0,00122

Nordmann vergleicht diesmal acht Daten seiner Messungen graphisch mit den Ausdrücken von Maxwell und Poincaré. Maxwell erhält aus der elektromagnetischen Lichttheorie für die Intensität der Welle, die durch eine Flüssigkeitsschicht von der Dicke Z und dem Leitungsvermögen R gedrungen ist, den Ausdruck $C^{-KZ\frac{1}{R}}$, Poincaré den Ausdruck $C^{-KZ\sqrt{\frac{1}{R}}}$.

Nordmann hat daher drei Kurven konstruiert; die eine auf Grund des Maxwellschen Ausdruckes, die zweite aus dem Ausdruck von Poincaré, die dritte für die Versuchsergebnisse; er findet, daß die Maxwellsche Kurve die äußerste ist, ihr folgt die der Versuchsergebnisse und darauf die, welche aus den Versuchsdaten nach Poincaré berechnet wurde; in diesem wichtigen Umstande sieht er die Bestätigung der Theorie.

Die übrigen Forscher bemühen sich, den Absorptionskoeffizienten der Elektrolyten experimentell zu bestimmen.

G. Udny Jule* erzeugt die elektrische Welle zwischen zwei Drähten und leitet sie so durch das Elektrolyt und bestimmt die Schwächung der durch das Elektrolyt gedrungenen Welle mit dem Elektrometer und Versuchsanordnung von Bjerknes**. Er bemerkte aber bald, daß er keine genauen Ergebnisse erzielen könne, weil die von den Enden des Drahtes und des Elektrolyts reflektierten Wellen interferieren. Mit vollkommenerer Methode und besserem Apparat wurde die Schwächung der Welle in den Elektrolyten von P. Zeemann*** gemessen. Die Welle ging durch das in ein langes Gefäß gegossene Elektrolyt, durch einen langen Lecherschen Leiter und wurde so von den Gefäßwänden nicht merklich reflektiert; die Intensität der Welle wurde mit dem Bolometer von Paalzow-Rubens† gemessen. Aus seinen Messungen ging hervor, daß Flüssigkeiten gleichen Leitungsvermögens das gleiche Absorptionsvermögen besitzen, und daß der Absorptionskoeffizient mit der Quadratwurzel des Leitungsvermögens und der reziproken Wellenlänge proportional ist.

A. Eichenwald†† verbesserte die Methode Zeemanns und bestätigte durch seine Versuche die Maxwellsche Theorie; Drude††† entwickelte die Lechersche Methode weiter; K. Wildermuth wendet die Zeemannsche Methode auch bei kleinern Wellen an und beweist, daß bei Wellen mit der Schwingungszahl $21{,}10^{-10}$ das Absorptionsvermögen ausschließlich vom Leitvermögen der Flüssigkeit abhängig ist. Die Drudesche Methode wurde von E. Marx*† und Coolidge**† angewandt und vervollkommnet; Coolidge hat hauptsächlich dielektrische Konstanten gemessen. Der Absorptionskoeffizient des Wassers für elektrische Wellen

* *Wied. Ann.* 50, p. 742, 1893.
** Bjerknes, *Wied. Ann.* 44, p. 573, 1891.
*** P. Zeemann, *Wied. Beibl.* 20, p. 562, 1896 u. 21, p. 57, 1897.
† *Wied. Ann.* 37, p. 329.
†† Ebd. 62, p. 571, 1897.
††† Ebd. 60, p. 43, 1897 u. 58, p. 1, 1896.
*† Ebd. 66, p. 411.
**† Ebd. 69, p. 125.

wurde mit einer, von den bisherigen abweichenden, neuen Methode von P. PFEIFFER* bestimmt, der — ähnlich wie man die Absorption des Lichtes mißt — den Absorptionskoeffizienten aus dem Verhältnis zwischen den Intensitäten der einfallenden und austretenden Welle bestimmt hat, sowohl für die fortschreitende, als auch für die reflektierte Welle.

Die Frage, ob das Durchlassungsvermögen der Elektrolyten den MAXWELLschen oder den POINCARÉschen Ausdruck bestätigt, kann experimentell einerseits nur auf Grund einer einwandsfreien Methode, andererseits nur durch Anwendung eines Apparates beantwortet werden, der empfindlicher und in seiner Funktionierung beständiger ist, als die bisherigen. Meine Versuche, die ich diesbezüglich zwei Jahre hindurch angestellt habe, überzeugten mich davon, daß der von mir ausgeführte Kohärer mit einem Kontakte in jeder Hinsicht diesem Zwecke entspricht. Ich habe deshalb den von mir im Jahre 1900 verfertigten und im Jahre 1901** beschriebenen Demonstrationsapparat zu einem Meßapparat umgewandelt, der diese Frage beantworten sollte.

Anstatt des aus Metallstückchen bestehenden Kohärers mit mehreren Kontakten habe ich einen sehr empfindlichen, zuverlässigen und gleichmäßig funktionierenden*** Kohärer mit einem einzigen Kontakte konstruiert, welcher in Genauigkeit und gleichmäßiger Funktionierung nicht nur die Kohärer aus Metallspähnen, sondern auch die übrigen einkontaktigen Kohärer weit übertrifft. Die Kohärer mit mehreren Kontakten werden nämlich mit der Zeit müde, d. h. sie reagieren nach längerer Benützung weder so stark noch so genau, wie anfangs; vielmehr verhalten sie sich nach Einwirkung von mehreren Funken nicht nur unsicher, sondern oft sogar ganz entgegengesetzt, als unter der Einwirkung des ersten Funkens.

---

* Neue Methode zur Messung der elektrischen Dispersion und Absorption bei Drahtwellen, Kolozsvár 1904.

** I. KÁROLY, Absorption von elektrischen Wellen, *Mathematikai és Physikai Lapok* (ungarisch) Jahrg. 1901, p. 230.

*** I. KÁROLY, Erzeugung von elektrischen Wellen durch Veränderung des Widerstandes im galvanischen Stromkreis, *Math. és Phys. Lapok*, Jahrgang 1903, p. 119.

Die von LODGE und V. v. LANG* konstruierten einkontaktigen Kohärer haben eben den Nachteil, daß sie nach dem Schütteln die Empfindlichkeit verlieren und von neuem eingestellt werden müssen, und daß überhaupt die kleinste Bewegung schon ausreicht den Widerstand des Kohärers wieder zu vergrößern. Der von H. TAYLOR** konstruierte sehr empfindliche, einkontaktige Kohärer hat wiederum den Nachteil, daß er nach der kleinsten mechanischen Erschütterung erklingt und selbst auf einer großen eisernen Unterlage, mit Kupfer vollständig umhüllt, die Einwirkungen der Wellen empfindet. Mein Kohärer ist von all diesen Nachteilen frei, und ich kann seine Empfindlichkeit regulieren und konstant erhalten.

Bei den mit den hier untersuchten analogen Absorptionserscheinungen entspricht ein guter einkontaktiger Kohärer besser den Anforderungen, als der HERTZsche Resonator oder die ZEHNDERsche Röhre, oder die von KLEMENCIC und LEBEDEW angewandte thermoelektrische Säule, oder auch der von RUBENS und RITTER angewandte Bolometer; wenigstens entsprachen diese Apparate bei den Versuchen meinen Erwartungen nicht. Zur Charakterisierung der Empfindlichkeit meines Kohärers bemerke ich, daß z. B. eine durch den Funken eines 3 m entfernten elektrischen Glöckleins erzeugte Welle nach Durchgang einer 2 m dicken Säule aus Leitungswasser dieselbe Änderung im Widerstande des Kohärers verursacht als dieselbe Welle, wenn sie direkt durch die Luft geht. Die Zuverlässigkeit des Kohärers kann durch die Sicherheit geprüft werden, mit welcher er jedesmal auf die Ladung reagiert, die 1 dm weit von einer in den städtischen dreiphasigen Stromkreis von 150 Volt Spannung eingeschalteten, nichtbrennenden Glühlampe isoliert aufgehängter 1 dm langer, $^1/_4$ mm starker nackter Kupferdraht von der städtischen Leitung erhält, wenn man den Kupferdraht mit einem Leiter berührt, der mit dem einen Ende des Kohärers verbunden ist.

Bei meinem Apparate geschieht sowohl die Zuführung der

---

* *Wied. Ann.* 57, p. 34, 1896.

** *Elektrotechn. Zeitschr.* 36, p. 717, 1903.

elektrischen Welle durch das Elektrolyt zum Kohärer, als die Einschaltung der Enden des Kohärers in den Stromkreis, als

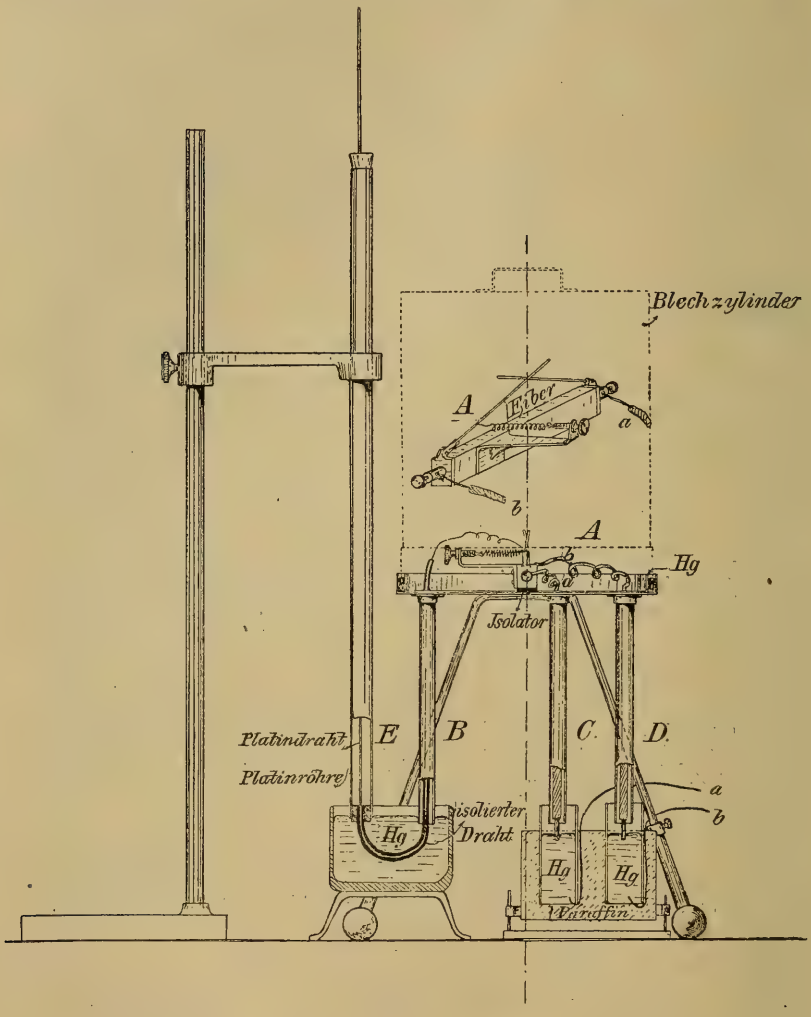


Fig. 1.

auch die vollständige Isolierung des Kohärers, von den in der Luft sich fortpflanzenden Wellen sehr einfach und in vollkommen zuverlässiger Weise, ebenso die Entfernung der benutzten Flüssigkeit von der Versuchsröhre. Die das Elektrolyt enthaltende Pla-

tinröhre und der durchgehende dünne Platindraht verändern keineswegs das Leitvermögen der Flüssigkeit, sodaß die Notwendigkeit nicht vorliegt, dasselbe zu bestimmen. Es genügt, sich von zuverlässigen Quellen chemisch reine Salze zu verschaffen und das der gewünschten Verdünnung entsprechende Leitvermögen des Elektrolyts aus den Tabellen von KOHLRAUSCH zu entnehmen. Man kann übrigens das Leitvermögen in der Röhre

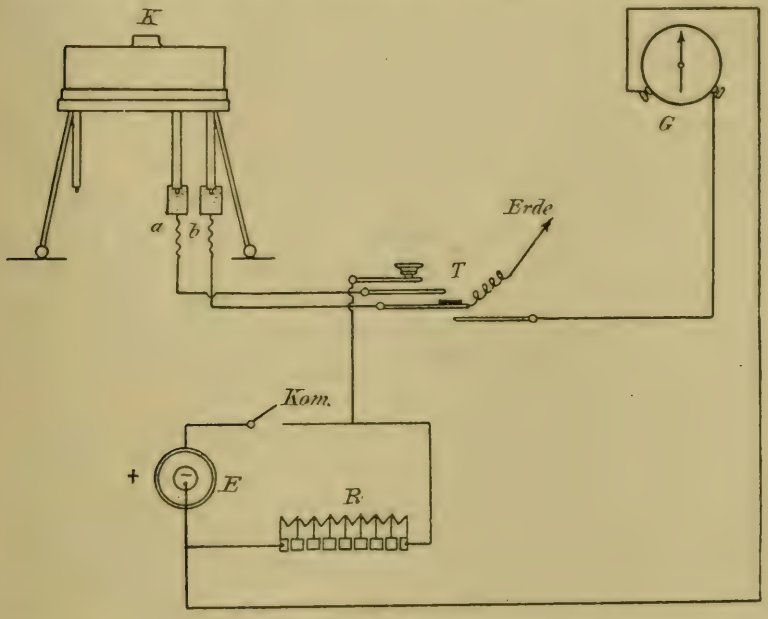


Fig. 2.

selbst mit der WHEATSTONEschen Brückenkombination kontrollieren, denn das untere Ende der Platinröhre steht mit dem Quecksilber nicht in Berührung, wir haben daher die bei der Berührung verschiedener Metalle auftretenden Kräfte nicht zu befürchten.

Meine Versuchsanordnung war die folgende (s. Fig. 1 u. 2): In eine auf eisernen Füßen ruhende eiserne Scheibe (Durchmesser 15 cm, Dicke $^1/_2$ cm) führen drei dünnwandige, zur Scheibe gelötete eiserne Röhren; um den Rand der eisernen Scheibe befindet sich ein 2 mm breiter und 2 mm tiefer, bis zur Hälfte mit

Quecksilber gefüllter Eisentrog, in den der 10 cm hohe und 15 cm breite Eisendeckel eingesetzt werden kann. Der einkontaktige Kohärer steht auf isolierter Grundlage auf der eisernen Scheibe und die mit seinen Enden verbundenen, jeder für sich isolierten Leiter werden durch die zwei benachbarten eisernen Röhren geführt. Die Enden dieser Leiter sind aus Platin und tauchen in zwei voneinander getrennte 4 cm hohe, 1,5 cm breite, bis zu $^2/_3$ mit Quecksilber gefüllte Röhren, jedoch so, daß dabei die eisernen Röhren das Quecksilber nicht berühren. Mit der in Fig. 4 abgebildeten Vorrichtung können die mit Quecksilber gefüllten Glasröhren soweit gehoben werden, daß das Quecksilber die Eisenröhren in der Höhe von wenigstens 1 cm bedeckt. In diesem Falle — wenn auch der Eisendeckel aufgesetzt ist — können nicht einmal die stärksten Wellen den Kohärer erreichen. Durch die dritte Eisenröhre des eisernen Gefäßes geht ein isolierter Leiter von einem Ende des Kohärers in ein 5 cm breites, 4 cm hohes mit Quecksilber gefülltes Glasgefäß, welches das untere Ende der Eisenröhre metallisch verschließt und von da in die Platinröhre, in welcher die Wellenabsorption der Elektrolyte untersucht wird.

Dieser Leiter ging isoliert durch das Quecksilber; ein Platindraht wurde ihm angelötet; dieser ging durch einen isolierten Stöpsel, der in das untere Ende der Platinröhre eingesteckt war, in die Versuchsröhre und zwar sogleich nach Verlassen des Stöpsels ohne Isolation lotrecht hinauf in die freie Luft, wo er eine Höhe von ca. 100 cm erreicht. Hier empfängt er die in einem Abstande von 2—3 dm erzeugten elektrischen Wellen und leitet sie durch das Elektrolyt bis zum Kohärer. Die elektrische Welle, die sich auf der Oberfläche des Platindrahtes fortpflanzt, muß, um den Kohärer zu erreichen, die Absorption des Elektrolytes überwinden, wirkt also auf den Kohärer mit geschwächter Intensität; die Schwächung derselben ist vom Durchlaßvermögen der Flüssigkeit abhängig. Die zwei Enden des Kohärers, welche in zwei voneinander getrennte, mit Quecksilber gefüllte Glasgefäße tauchen, sind mit Hilfe des Quecksilbers mittels isolierter Leiter in jenem Zweig des von einem RAOULTschen Normalelement gespeisten Stromkreises verbunden, in welchen der DEPREZsche Spiegelgal-

vanometer eingeschaltet ist; im andern Zweige sind beständig 5 Ω eingeschaltet. In der nicht verzweigten Leitung befindet sich ein Kommutator, und im Zweige, welcher den Kohärer enthält, zwei EDELMANNsche Unterbrecher. Bei der objektiven Ablesung steht die Skala 1 m weit vom Spiegel des Galvanometers; bei

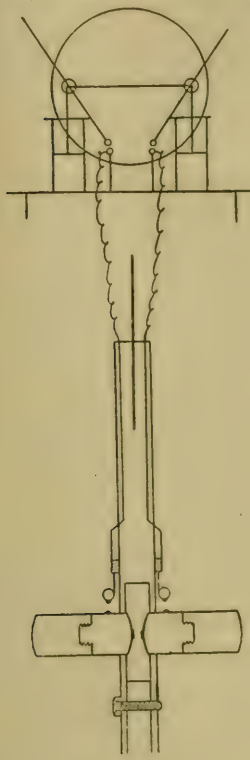


Fig. 3.

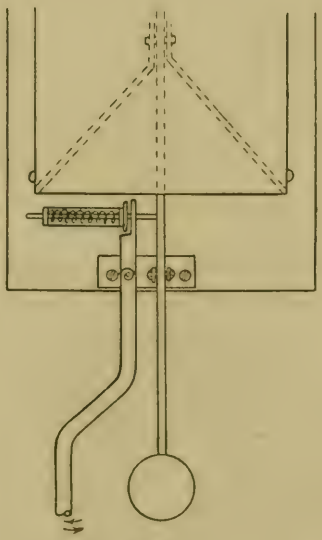


Fig. 4.

normalem Zustande des Kohärers (bei unendlich großem Widerstande) steht die Nadel beständig auf 0; nach Einwirkung der durch die Luft gehenden Welle beträgt der Ausschlag immer 110 Skalenteile, auch nach Hunderten von Versuchen. Wenn wir so den der Intensität der Welle entsprechenden Kohärereffekt mit den Ausschlägen der Galvanometernadel bestimmen, dann geht die Welle sowohl durch den Leiter der beiden mit Quecksilber gefüllten Glasgefäße, als auch durch die Flüssigkeit, denn der

Kohärer ist beständig mit dem Metalldeckel verschlossen. Wird die Intensitätsschwächung der durch die Flüssigkeit gehenden Welle beobachtet, so werden die mit Quecksilber gefüllten Gefäße soweit gehoben, bis das Quecksilber die Eisenröhren in einer Höhe von mindestens 1 cm bedeckt, sodaß in diesem Falle die Welle sich nicht durch die Luft bis zum Kohärer fortpflanzen kann. Die Änderung des Kohärerwiderstandes, der Ausschlag der Galvanometernadel hängt also von der Intensität der durch die Flüssigkeit gedrungenen Welle ab. In die Platinröhre wird 0,1 cm^3-weise solange Flüssigkeit eingegossen, bis der Kohärer seinen unendlich großen Widerstand behält, also die Galvanometernadel beständig auf 0 verbleibt. Die Höhe des in diesem Augenblicke in der Platinröhre vorhandenen Flüssigkeit ist die Grenzhöhe, durch welche die Welle nicht mehr zu durchdringen resp. keinen Kohärereffekt hervorzubringen vermag. Wird jedoch von der Platinröhre nur 0,1 cm^3 Flüssigkeit entfernt, so reagiert bereits der Kohärer auf die Einwirkung der Welle und die Nadel schlägt aus. Das so zurückgebliebene Elektrolyt ergibt jene Flüssigkeitsmenge resp. Höhe, welche die Wellen noch durchläßt, sodaß dieselben noch den Kohärereffekt hervorbringen und daher die Nadel ablenken können.

Zur Erzeugung der Wellen diente eine WIMSHURSTsche Maschine (der Durchmesser der Scheibe betrug 30 cm) und ein sehr zuverlässiger, gleichmäßig funktionierender Oszillator von K. L. LINDMANN* (s. Fig. 3). Zur Änderung des Kohärerwiderstandes genügt auch in diesem Falle ein mäßiges Anklopfen des Eisengefäßes: die Nadel kehrt sofort auf 0 zurück.

Die Wellenlänge betrug 20 cm; vor jeder Ablesung habe ich fünf Funken erzeugt. Der Stromkreis wurde nur in dem Momente geschlossen, als die Ablesung geschah; ferner habe ich den Kohärer auch bei unterbrochenem Strome erschüttert. Die Länge der Platinröhre betrug 39,5 cm; ihr Kubikinhalt war vom Stöpsel an gerechnet 45,5 cm^3; 0,1 cm^3 Flüssigkeit entsprach also einer Höhe von 0,87 mm.

---

* K. L. LINDMANN, *Ann. der Phys.* 4, p. 617, 1901 und DRUDE, *Ann. der Phys.* 7, p. 826, 1902.

Bei den Versuchen wurden die folgenden Elektrolyte benutzt:

5 % KCl
10 % KCl
15 % KCl
20 % KCl
KCl Normallösung (7,14 %)
$\frac{\text{KCl Normallösung}}{2}$
$\frac{\text{KCl Normallösung}}{5}$
$\frac{\text{KCl Normallösung}}{10}$
$\frac{\text{KCl Normallösung}}{20}$
$\frac{\text{KCl Normallösung}}{50}$
15 % NaCl
25 % NaCl
10 % $CuSO_4$.

Aus der folgenden Tabelle geht klar hervor, daß zwischen dem Durchlaß- und Leitvermögen der Elektrolyte ein enger Zusammenhang besteht. Denselben Leitvermögen entsprechen dieselben Durchlaßhöhen, einem größern Leitvermögen ein kleineres Durchlaßvermögen. Um diesen Zusammenhang graphisch darzustellen und mit der Theorie zu vergleichen, habe ich die Kurven sowohl nach dem MAXWELLschen, als auch nach dem POINCARÉschen Ausdruck aufgezeichnet, damit daraus durch Vergleichung mit der experimentell gefundenen Kurve hervorgehen soll, welcher Ausdruck den experimentellen Ergebnissen näher stehe. Bei den Kurven sind als Abszissen die Leitvermögen der Elektrolyte, als Ordinaten die in Millimetern ausgedrückten Höhen der Elektrolyte, welche noch die Wellen durchlassen, aufgetragen worden. Ich habe die Leitvermögen aus den KOHLRAUSCHschen Tabellen übernommen. Ich habe von MERCK (Darmstadt) die reinsten Substanzen bezogen und die Lösungen genau den KOHLRAUSCHschen Tabellen entsprechend hergestellt, und in der Tat wurden in der

Die Versuchsresultate.

Prozent	Leitvermögen (Ω^{-1} cm^{-1}) des Elektrolyts	Durchlaßmenge (cm)^3 des Elektrolyts	Durchlaßhöhe (mm) des Elektrolyts
	KCl		
5 %	0,069	7,6	66,12
10 %	0,136	5,5	48,00
15 %	0,202	4,7	40,89
20 %	0,268	3,6	31,32
	Normal-KCl-Lösung und -Verdünnungen		
Normallösung	0,098	5,9	51,33
1/2 „	0,0512	8,3	72,28
1/5 „	0,0216	14,4	125,28
1/10 „	0,0112	17,9	155,73
1/20 „	0,00579	26,8	233,16
1/50 „	0.0024	41,0	336,00
	NaCl		
15 %	0,164	4,5	39,15
25 %	0,214	4,3	37,41
	$CuSO_4$		
10 %	0,032	10,7	93,09

Platinröhre keine Änderungen wahrgenommen. Die so hergestellten Lösungen wurden noch an demselben Tage zu den Versuchen benutzt.

Um die Theorie mit dem Experiment zu vergleichen, diente als Ausgangspunkt das Leitvermögen einer 5 prozentigen KCl-Lösung: 0,069 und das Versuchsergebnis: 7,6 cm^3 für die Menge der durchlassenden Schicht. Auf diese beiden Daten wurden der Theorie entsprechend die Menge der durchlassenden Schicht bezogen und die Ordinaten sowohl für die MAXWELLschen, als auch für die POINCARÉschen Ausdrücke erhalten.

Ich habe nämlich das größere Leitvermögen mit dem Leitvermögen 5 proz. KCl-Lösung dividiert, hierauf mit dem Quotienten die Durchlaßmenge der 5 proz. KCl-Lösung (7,6 cm^3) geteilt, und dies ergab die Ordinate entsprechend dem MAXWELLschen Ausdrucke in cm^3. Um die entsprechende Größe in cm^3 für den POINCARÉschen Ausdruck zu erhalten, habe ich 7,6 cm^3 mit der

Quadratwurzel dividiert. War das Leitvermögen des fraglichen Elektrolyts kleiner als das der 5 proz. KCl-Lösung, dann habe ich letzteres durch das erstere dividiert und mit dem Quotienten resp. mit dessen Quadratwurzel das der 5 proz. KCl-Lösung entsprechende Versuchsergebnis multipliziert. — Die so erhaltenen cm^3 habe ich sodann mit der einem cm^3 entsprechenden Höhe (8,7 mm) multipliziert und so die Durchlaßhöhen in Millimetern erhalten.

Die Resultate dieses Vergleichs sind in Fig. 5 und in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Die Versuchsergebnisse und die daraus theoretisch abgeleiteten Resultate.

Prozent	Versuchsergebnisse: Leitvermögen ($\Omega^{-1}\,cm^{-1}$) des Elektrolyts	Versuchsergebnisse: Durchlaßmenge (cm^3) des Elektrolyts	Versuchsergebnisse: Durchlaßhöhe mm des Elektrolyts	Theoretische Resultate: Poincarésche Durchlaßmenge (cm^3) des Elektrolyts	Theoretische Resultate: Poincarésche Durchlaßhöhe mm des Elektrolyts	Theoretische Resultate: Maxwellsche Durchlaßmenge (cm^3) des Elektrolyts	Theoretische Resultate: Maxwellsche Durchlaßhöhe mm des Elektrolyts
			KCl				
5 %	0,069	7,6	66,12	7,6	66,12	7,6	66,12
10 %	0,136	5,5	48,00	5,48	47,68	3,85	33,6
15 %	0,202	4,7	40,89	4,42	37,5	2,596	22,62
20 %	0,268	3,7	31,32	3,85	33,5	1,956	17,1
			Normal-KCl-Lösung und Verdünnungen				
Normallösung	0,098	5,9	51,33	6,35	55,68	5,35	46,54
1/2 „	0,0512	8,3	72,28	8,61	76,56	10,26	89,26
1/5 „	0,0216	14,4	125,28	13,6	118,32	24,24	210,9
1/10 „	0,0112	17,9	153,73	18,9	164,43	46,82	407,3
1/20 „	0,00579	26,8	233,16	26,3	228,81	90,74	789,4
1/50 „	0,0024	41,0	336,7	40,75	354,52	218,5	1900,95
			NaCl				
15 %	0,164	4,5	39,15	4,9	42,63	3,19	27,8
25 %	0,214	4,3	37,41	4,32	37,58	2,45	21,4
			$CuSO_4$				
10 %	0,032	10,7	93,09	11,5	100,05	16,42	142,85

Die so erhaltenen Daten und die daraus konstruierten Kurven bestätigen ganz ausdrücklich die POINCARÉsche Theorie gegenüber der MAXWELLschen.

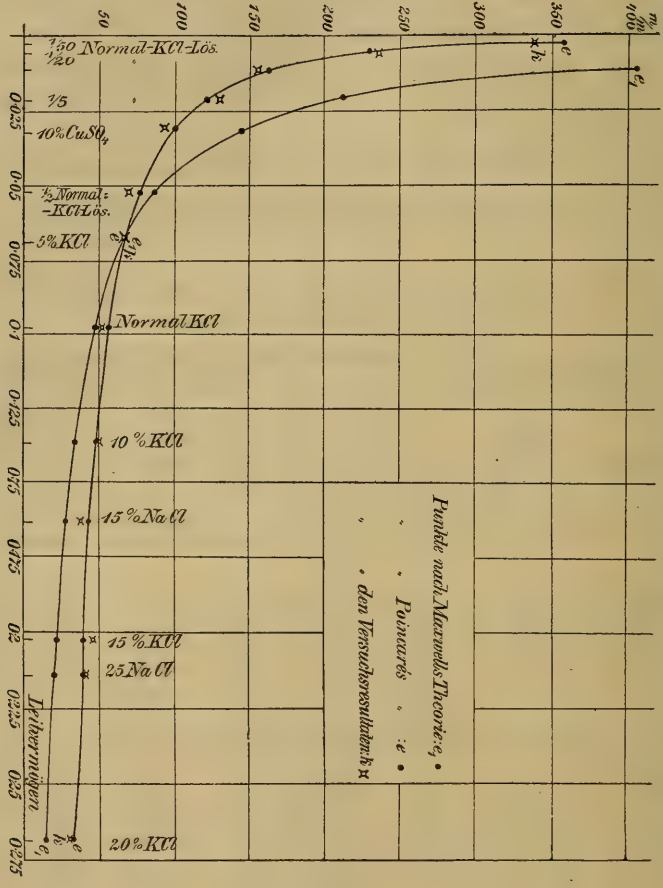


Fig. 5.

Das Durchlaßvermögen der Elektrolyte ist mit der Quadratwurzel des spezifischen Leitvermögens verkehrt proportional.

SITZUNGSBERICHTE.*

I. In den Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften wurden vom Oktober 1904 bis Juni 1905 von den nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten vorgelegt:

Sitzung am 17. Oktober 1904.

1. Josef Krenner, o. M.: *Inesit von Nagybánya.*
2. Julius Istvánffy, k. M.: *Über die Lebensfähigkeit der Borytissporen.*
3. Ludwig Schlesinger, k. M.: *Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen* (I. Mitteilung).
4. Philiph Lenard, k. M. und Virgil Klatt: *Über die Erdalkaliphosphore* (s. p. 1—34 dieses Bandes).

Sitzung am 14. November 1904.

1. Andreas Högyes, o. M: *Bericht über die Tätigkeit des Budapester Pasteurinstitutes in 1903.* (S. p. 78—81 dieses Bandes.)
2. Ludwig Winkler, k. M.: *Die Veränderung des Absorptionskoeffizienten der Gase mit der Temperatur.*

Sitzung am 12. Dezember 1904.

1. Maurus Réthy legt die neue Ausgabe des II. Bandes von Wolfgang Bolyai *Tentamen* vor, die er in Gemeinschaft mit Josef Kürschák und Béla v. Tötössy redigiert hat.
2. Rudolf v. Kövesligethy, k. M.: *Die Berechnung seismischer Elemente.* (S. p. 42—77.)

---

* In dieser Abteilung geben wir eine Übersicht der in den Sitzungen der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der kgl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft gelesenen Arbeiten, Vorträge und Vorlesungen. Ein Teil derselben ist entweder dem ganzen Umfange nach oder in längerem Auszuge im vorangehenden Teile dieses Bandes enthalten; dieser Umstand ist auch bei den betreffenden, hier der Vollständigkeit wegen angeführten Titeln angedeutet.

3. Ludwig Schlesinger, k. M.: *Beiträge zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen.* (II. Mitteilung.)
4. Koloman Tellyesniczky: *Der ruhende Kern und die Teilung des Kerns.*

Sitzung am 16. Januar 1905.

1. Peter Treitz: *Untersuchung des Bodenschlammes des Balaton-Sees.* Vorgelegt vom o. M. Ludwig Lóczy.
2. Koloman Ernszt: *Die chemische Zusammensetzung des Bodenschlammes und des Grundbodens des Balaton-Sees.* Vorgelegt vom k. M. Alexander Kalecsinszky.
3. Michael Bauer: *Ein Beitrag zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen.* Vorgelegt vom k. M. Gustav Rados.
4. Ludwig Schlesinger, k. M.: *Über isoliertwertige Funktionen.*

Sitzung am 13. Februar 1905.

1. Friedrich Reusz: *Beiträge zur Anatomie und Physiologie des Kleinhirnes der Tauben.* Vorgelegt vom o. M. Ferdinand Klug.
2. Ernst Tézner: *Über die Abhängigkeit der Schleimabsonderung von verschiedenen physiologischen Verhältnissen.* Vorgelegt vom k. M. Ferdinand Klug.
3. Eugen Bernátsky: *Monographie der heimischen Asparagus-Arten.* Vorgelegt vom o. M. Julius Klein.
4. Leopold Fejér: *Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik.* Vorgelegt vom k. M. Gustav Rados.
5. Franz Tangl, k. M. und Stefan Weiser: *Über den Glyzeringehalt des Blutes.*

Sitzung am 13. März 1905.

1. Michael Lenhossék, o. M.: *Über die Entwicklung der peripherischen Nervenfasern.*
2. Ladislaus Hollós, k. M.: *Die unterirdischen Pilze Ungarns.* Antrittsvortrag.
3. Béla Alexander: *Die Untersuchung der Knochen in der Hand mittels X-Strahlen.*
4. Lorant Lengyel: *Ein Beitrag zur Thermodynamik der Pepsinverdauung.* Vorgelegt vom k. M. Franz Tangl.

Sitzung am 10. April 1905.

1. Karl Zimányi, k. M.: *Kristallographische Untersuchung des Cinnabarites.* Antrittsvortrag.
2. Maurus Hoór, k. M.: *Neuere Beobachtungen über die dielektrischen Nachwirkungserscheinungen.*

3. Michael Bauer, k. M.: *Über das Puiseuxsche Polygon.* Vorgelegt vom k. M. Gustav Rados.
4. Paul Dienes: *Zur Theorie der analytischen Funktionen.* Vorgelegt vom k. M. Gustav Rados.

Sitzung vom 15. Mai 1905.

1. Eugen Daday, k. M.: *Übersicht der Mikrofauna der Süßwässer von Paraguay.*
2. Rudólf v. Kövesligethy, k. M.: *Das Erdbeben von Ceram.*
3. Ludwig Schlesinger, k. M.: *Zur intrinsequen Geometrie der zweidimensionellen Mannigfaltigkeiten.*
4. Zoltan Toborffy, *Epidot aus dem Val di Vin.* Vorgelegt vom o. M. Josef Krenner.
5. Samuel Hönig: *Das Gesetz der Atomanziehung.* Vorgelegt vom k. M. Maurus Réthy.
6. Julius Kiss: *Über den Zusammenhang der gärungverhindernden Wirkung mit der chemischen Gruppe der Elemente.* Vorgelegt vom k. M. Franz Tangl.

Sitzung am 20. Juni 1905.

1. Julius König, o. M.: *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.*
2. Josef Kürschák, k. M.: *Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials.*
3. Eugen Daday, k. M.: *Eine neue in Fischen parasitisch lebende Infusorie.*
4. Michael Bauer: *Affektlose Gleichungen.* Vorgelegt vom o. M. Julius König.
5. Ireneus Juvancz: *Zur Theorie der Grundoperationen der Arithmetik.* Vorgelegt vom o. M. Julius König.
6. Alexander Lichtenberg: *Zur Entwicklung und Histologie des männlichen Harnrohres.* Vorgelegt vom o. M. Ludwig Thanhofer.

II. In den Sitzungen der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft wurden die folgenden Vorlesungen gehalten:

A) Fachsektion für Zoologie.

(Referiert von Alexander von Gorka.)

Sitzung am 7. Oktober 1904.

1. L. v. Méhely meldet mit aufrichtiger Trauer den am 2. Oktober erfolgten Tod Alfred Nehrings, Professor an der landwirtschaft-

lichen Hochschule zu Berlin und gedenkt zugleich der wissenschaftlichen Verdienste Nehrings. Die Denkrede erschien dem ganzen Umfange nach in *Állattani Közlemények* (III. Bd. 1904, p. 226—229).

2. Al. Gorka spricht über *die physiologische Funktion der Speicheldrüsen der Weinbergschnecke (Helix pomatia L.)*. Nach seinen physiologisch-chemischen Untersuchungen reagiert der reine Speichel stark alkalisch, ist stets glycogenfrei und enthält chemisch nachweisbares Mucin. Die Speicheldrüse speichert viel Glycogen auf; die Menge des aufgespeicherten Glycogens beträgt 5,03 % seiner Trockensubstanz. Verf. folgert daraus, daß die Speicheldrüse der Schnecken bei der Glykogenbildung und Glykogenaufhäufung eine fast ebenso hervorragende Rolle spielt, wie die Leber der Gastropoden. Die Speicheldrüse bildet auch diastatische Enzyme, auf deren Wirkung aus Stärke, Glykogen und Dextrin, also aus Polysacchariden, Erythrodextrin, Maltose und endlich Traubenzucker entsteht. Der so entstandene Traubenzucker ist aber nur zu gewissen Zeiten nachweisbar, da später durch die Einwirkung der ebenfalls von der Speicheldrüse produzierten Zymase aus dem Traubenzucker Äthylalkohol entsteht. Die Speicheldrüse enthält ein besonderes Enzym (Zymase), das aus Stärke, Glykogen, Dextrin und Traubenzucker Äthylalkohol entstehen läßt. Der Vortrag erschien dem ganzen Umfange nach in ungarischer Sprache in *Állattani Közlemények* (III. Bd. 1904, p. 211—226); in deutscher Sprache in *Mathem. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn* (XXIII. Bd. 1905, p. 156—177).
3. L. v. Méhely hält einen Vortrag über *eine neue Eidechsenart*, die er im südwestlichen Teile von Kroatien, im Klekgebirge und bei Jaszenák entdeckt und zu Ehren des Direktors der zoologischen Abteilung des Ungarischen Nationalmuseums Dr. Géza v. Horváth als *Lacerta Horváthi* benannt hat. Der Vortragende schildert eingehend die morphologische Eigentümlichkeit der neuen Art, ihre geographische Verbreitung und Lebensweise, sowie ihre phylogenetischen Beziehungen. Zum Schluß demonstriert er einige lebende Exemplare derselben. Die Abhandlung ist, mit 5 Textabbildungen und mit 1 Tafel versehen, in *Állattani Közlemények* (III. Bd. 1904, p. 193—210) und in *Annales Musei Nationalis Hungarici* (II. Bd. 1904, p. 362—377) erschienen.

Sitzung am 11. November 1904.

1. E. Csiki berichtet „*Über die Verbreitung von Trochosa singoriensis Laxm. in Ungarn*". Laut Verf. wurde diese gewaltige Spinnenart in Ungarn im Jahre 1888 von K. Chyzer an der untern Donau bei Drenkova entdeckt. Seither ist dieselbe in Bázias, Temes-Kubin, Plosicz, Mezöhegyes, Hódmezövásárhely, Öcsöd, Hajdudorog,

Nyék, Sajó-Kaza und neuerdings in Déva gefangen worden. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist diese Spinnenart von der rumänischen Ebene entlang des Donau-Tales nach Ungarn eingedrungen. Der Vortrag erschien in *Állattani Közlemények* (IV. Bd. 1905, p. 97—100).

2. G. v. Horváth demonstriert die vorzüglichen *Raupenpräparate* von Friedr. Cerva (Budapest).
3. J. Lósy berichtet über seine im Auftrage des Ungar. Ackerbauministeriums angestellten mehrjährigen Studien über *das Vorkommen des Maikäfers in Ungarn*. Laut den Berichten der offiziellen landwirtschaftlichen Berichterstatter, der Förster und landwirtschaftlichen Lehranstalten kommt der Maikäfer in Ungarn Jahr für Jahr in großer Menge vor. Der allgemeine große Flug fiel auf das Jahr 1899 und das darauf folgende dritte Jahr 1902. Hinsichtlich des Maikäferfluges nehmen das Gebiet jenseits der Donau und die Komitate Ung und Bereg eine Ausnahmestellung ein; im letzteren ist nämlich die Flugzeit auf die Jahre 1901 und 1904 gefallen, während im ersteren der Maikäfer im Jahre 1900 aus dem Wiener Becken, im darauffolgenden Jahre aber aus Kroatien in großer Menge eingedrungen ist. Schließlich gedenkt Verf. der Varietäten des Maikäfers, die er in instruktiver Zusammenstellung demonstriert. Laut seiner Angabe leben in Ungarn drei Maikäferarten, d. i. *Melolontha vulgaris*, *M. hippocastani* und *M. pectoralis*, wovon letztere bloß in den Komitaten Arad, Temes und Krassó-Szörény vorkommt.
4. L. v. Méhely schildert auf Grund eigener Sammelreisen und Studien die herpetologischen Verhältnisse des Mecsekgebirges (Ungarn, jenseits der Donau) und der Kapela (Kroatien). Von den beobachteten und studierten Arten sind für die Fauna von Ungarn folgende neu: *Salamandra atra* Laur., welchen der Vortragende bei Vrelo (Komitat Modrus-Fiume) in 25 Exemplaren gesammelt hat; ferner *Molge cristata* Laur., subspecies *Karelinii* Strauch., *Vipera berus L.*, var. *bosniensis* Btg., *Molge vulgaris L.* subsp. *Kapelana* n. subsp. und *Lacerta viridis* Laur. var. intermedia n. var., welch letztere Subspecies bezw. Varietäten auch für die Wissenschaft neu sind. Der Vortrag erschien dem ganzen Umfange nach in ungarischer Sprache in *Állattani Közlemények* (III. Bd. 1904, p. 241—289); in deutscher Sprache in *Annales Musei Nationalis Hungarici* (III. Bd. 1905, p. 256—316).

Sitzung am 2. Dezember 1904.

1. L. Biró spricht über *die Fauna der Höhlen des Komitates Bihar* und legt in Begleitung seines Vortrages zwei neue blinde Käfer vor, deren einen er nach Alex. Mocsáry, dirigierendem Kustos am Kgl. Ungar. Nationalmuseum, *Pholeuon Mocsáryi*, den andern aber zu Ehren des verdienstvollen Erforschers der Biharer Höhlen, Julius

v. Czárán, Gutsbesitzer im Komitate Arad, *Pholeuon Czárâni* benannt hat. Der Vortrag wurde durch Vorlage von photographischen Aufnahmen und diverser Präparate illustriert.

2. Als Ergänzung des vorigen Vortrags spricht E. Csiki über *die blinden Höhlenkäfer*. Nach Darstellung der morphologischen Verhältnisse derselben weist er die in Ungarn neu entdeckten vier Arten vor, deren eine er mit dem Namen *Anophthalmus Birói* belegt hat.
3. Th. Kormos demonstriert Batrachierlarven aus Ägypten, an welchen er die interessante Beobachtung gemacht hat, daß die Resorption des Schwanzes schon vor dem Erscheinen der vorderen Gliedmaßen beginnt. (Vgl. *Állattani Közlemények* IV. Bd. 1905, p. 100—103.)

Sitzung am 13. Januar 1905.

1. Géza Entz senior hält seinen Schlußvortrag über „*Farben der Tiere und Mimicry*". Der Vortragende befaßt sich mit der eigentlichen Mimicry und geht von der Tatsache aus, daß in der Organismenwelt die Ähnlichkeit in Form, Farbe und Zeichnung eine ziemlich allgemeine und gewöhnliche Erscheinung sei. Nicht nur die einem Stamm entsprossenen Blutsverwandten, sondern auch ihrer Abstammung nach einander sehr fernstehende gleichen sich; einzelne Tiere sind sogar dem Teile anderer Tiere, Pflanzen oder Pflanzenteilen, sowie Pflanzen, Tieren oder Teilen des Tierkörpers ähnlich. Allein die Ähnlichkeit ist in vielen Fällen bloß derart, daß sie nur den oberflächlichen Beobachter für einen Augenblick irre leitet, zuweilen erstreckt sie sich auf so geringfügige minutiöse Details, die auch für die Irreleitung eines aufmerksamen Beobachters für übertrieben erscheinen und auch vom Standpunkte der Mimicrytheorie übertrieben sind, weil sie die Grenzen der Notwendigkeit überschreiten. Aus der Ähnlichkeit aber kann in den meisten Fällen nachweisbar weder der Nachahmer, noch der Nachgeahmte positiven Nutzen ziehen. Es ist häufig der Fall, daß wehrlose Tiere, andere ebenso wehrlose, Wassertiere die Landtiere, Tiere von kleiner oder gar mikroskopisch kleiner Form große Tiere, andere, die ein verborgenes Leben führen, frei umherwandelnde, Tiere fernliegender Weltteile einander, jetzt lebende die längst ausgestorbenen nachahmen. Zudem beruht die ganze Mimicrytheorie auf der anthropomorphen Auffassung, daß die Tiere ebenso fühlen, ebenso kombinieren, ebenso urteilen und irren, wie der Mensch.

Nach den Erörterungen des Verf. läßt sich die Entwicklung der Mimicry unter keinen Umständen mit der natürlichen Zuchtwahl erklären, denn jene zufällig entstehenden geringfügigen Veränderungen, deren Summierung durch eine lange Reihe von Generationen zu einer wirklich nützlichen Ähnlichkeit führen könnte, sind anfänglich so belanglos und gering, daß man ihre Entwicklung

und ihren Bestand nur mit Voraussetzung einer gewissen Zielstrebigkeit erklären könnte und damit würde in die Erklärung der Naturerscheinungen abermals jenes metaphysische Prinzip eingeschmuggelt, dessen Beseitigung eine der größten Errungenschaften der neueren Naturforschung bildet.

2. Der Vorsitzende Géza Entz senior meldet, daß das Mandat des Redakteurs von „*Állattani Közlemények*“ abgelaufen ist, worauf die Sektion Ludwig v. Méhely auf weitere drei Jahre (1905—1908) einstimmig zum Redakteur erwählt.
3. Zoltán Szilády und Alexander Gorka unterbreiten ihre Anträge behufs der weiteren Herausgabe der bibliographischen Zusammenstellung der ungarischen zoologischen Litteratur. Beide Anträge wurden einer Kommission, bestehend aus den Herren G. Horváth, L. v. Méhely, G. Entz, K. Kertész und A. Gorka, übergeben.

Sitzung am 3. Februar 1905.

1. Alexander Gorka legt die Abhandlung K. J. Tunners vor: *Die Morphologie des männlichen Geschlechtsapparates und der osmotische Druck des Blutes von Cybister laterimarginalis de Geer.*

Verf. bietet eine eingehende anatomisch-histologische Beschreibung des männlichen Geschlechtsapparates von *Cybister laterimarginalis*. Den osmotischen Druck des Blutes hat Verf. nur darum festzustellen gesucht, um auf Grund dessen eine entsprechende isotonische Fixierungsflüssigkeit zusammenstellen zu können. In anatomischer Hinsicht bestätigt Verf. die Resultate der diesbezüglichen Untersuchungen früherer Forscher (Dufour, Suckow usw.). In histologischer Beziehung beanspruchen hauptsächlich folgende Beobachtungen eine besondere Erwähnung.

In den Hoden fand Verf. niemals reife, vollständig entwickelte Spermatozoen, sondern bloß Spermatiden, welche sich am Ende des Röhrenteiles der mit den Hoden verbundenen Nebenhoden zu Spermatozoen bilden. Dieser Endteil der Nebenhoden birgt zur Paarungszeit Tausende von Spermatozoen, die hier schon paarweise mit dem Kopfteil verwachsen sind und derart Doppelspermatozoen bilden, wie sie Ballowitz bei *Dytiscus marginalis* beobachtet hat. In den Hoden spielen sich somit bloß die Teilungs- und Wachstumsphasen der Spermatogenesis ab, wogegen der Reifungsprozeß im obern Teile der Nebenhoden vor sich geht und der Ablagerungsplatz der Spermatozoen in der untern Hälfte der Nebenhoden liegt, die im Gegensatz zum obern Teil ganz mit flachem Epithel versehen ist.

Der obere, mit einem geräumigeren Lumen versehene Teil der Anhangsdrüse ist von weniger drüsiger Natur, als der mittlere Teil, in welchem durch außerordentlich hohe Epithelzellen jenes charakteristische Sekret ausgeschieden wird, welches meistens nur im obern,

beträchtlich erweiterten Teile flüssig wird und nach der Ansicht des Verfs zur Verdünnung des Spermas dient. An der Basis der Anhangsdrüsen, unmittelbar an der Einmündung des mit den Nebenhoden zusammenhängenden Vas deferens, zieht eine ansehnliche Anschwellung die Aufmerksamkeit auf sich. Auf Grund seiner Untersuchungen ist Verf. geneigt, dieser Anschwellung die physiologische Bedeutung einer Vesicula seminalis zuzuschreiben. Am Vereinigungspunkte der beiden Anhangsdrüsen ist eine sehr interessant eingerichtete Schließvorrichtung angebracht, dessen wesentlicher Teil ein mit Muskeln im Zusammenhange stehender Chitinkeil ist, welcher im Ruhezustand der Muskeln den Spermatozoen den Weg nach außen vollständig verschließt, dagegen bei Zusammenziehung der Muskeln den Weg nach außen, oder besser gesagt, gegen den Penis öffnet.

Den osmotischen Druck hat Verf. in Ermangelung entsprechenden Untersuchungsmaterials nicht an *Cybister laterimarginalis*, sondern an *Hydrophilus piscus* bestimmt und gefunden, daß derselbe 6—7 Atmosphärendruck beträgt. Auf Grund dessen empfiehlt er zur Fixierung der Käfergewebe als stets bewährte Fixierungsflüssigkeit die Mayersche Flüssigkeit, wovon man 100 ccm mit 20 ccm destilliertem Wasser verdünnt.

2. Der Vorsitzende Géza Entz senior legt den Besicht der aus der vorigen Sitzung entsendeten Kommission vor. Derselbe gipfelt darin, daß die Bibliographie der ungarischen zoologischen Litteratur im Anschluß an die bisherigen Bände (von 1870—1900) für die Jahre 1901—1905 noch separat und nur ungarisch, aber, vom Jahre 1906 angefangen, als jährliche Beilage der *Állattani Közlemények* auch in einer fremden Sprache herausgegeben werden soll. Zum Redakteur des nächsten Bandes wurde Alexander Gorka erwählt.

Sitzung am 3. März 1905.

1. Eduard Ulbrich legt seine *Beobachtungen über die Lepidopteren von Isaszegh* vor, wobei er auf einige neue und seltene Aberrationen hinweist, nämlich: *Pieris Daplidice* L. ab. *Raphani* Esp. im August ein ♂, welcher mit Exemplaren aus Tunis vollständig übereinstimmt. *Argynnis Aglaja* L. im Juli ein ♀ mit sehr viel schwarzer Zeichnung. *Argynnis Adippe* L. ein Exemplar mit grüner Färbung der Unterseite, wahrscheinlich var. *Chlorodippe* H. S. *Melanargia Galatea* L. mit fahlbrauner Zeichnung. *Lycaena Coridon* Poda ab. *Tiphys* Esp., ab. *cinnus* Hb., ab. *marginata* Tutt., ab. *punctata* Tutt., ab. *aurantia* Tutt. (♀), ab. *striata* Tutt., ab. *obsoleta* Tutt. und ab. *suavis* Schulz, ferner eine aberrierende Form mit schwarzem Mittelfleck auf dem Vorderflügel.
2. Ernst Csiki demonstriert die „*Morphocaraben Ungarns*“ und er-

örtert die morphologischen Merkmale, auf denen die Einteilung dieser Gruppe beruht.

3. Ludwig Soós interpretiert die „*Hauptprinzipien der Mollusken-phylogenie*“ und gibt eine kritische Zusammenfassung unserer Kenntnisse über die phyletische Herleitung und Entwicklung der Mollusken.

Sitzung am 7. April 1905.

1. Ernst Csiki legt „*Vier neue Coleopteren aus Ungarn und eine aus Bosnien*“ vor. Die Arten werden charakterisiert und mit ihren Verwandten verglichen.
2. Ludwig v. Méhely schildert „*Hufticre, die auf Bäumen leben*“. Im Anschluß an *Procavia valida* True, welche Art das Königl. Ungar. Nationalmuseum von K. Katona aus dem Gebiete des Kilima-Ndjaro erhalten hat, bespricht der Vortragende die verwandschaftlichen Beziehungen, welche die Procaviidae mit den primitiven Insectivoren, ferner mit den Creodonten und Condylarthren verbinden und gelangt zu der Ansicht, daß die Procaviiden für den letzten Ausläufer des Condylarthrenstammes zu betrachten sind.
3. Zufolge einer Zuschrift des Ausschusses der Kgl. Ung. Naturwiss. Gesellschaft wird eine Kommission, bestehend aus den Herren G. Entz sen., G. Horváth, L. Méhely, St. Rátz und K. Kertész, entsendet, die sich mit folgenden Fragen zu beschäftigen hat: a) Auf welche Weise könnten solche Gebiete, die naturhistorische Spezialitäten beherbergen, dem nivellierenden Einflusse der modernen Kultur entzogen werden? b) Wie wäre eine planmäßige Erforschung der einzelnen Landesteile durchführbar?

Sitzung am 5. Mai 1905.

1. Ludwig Aigner berichtet über „*Neue Formen der ungarischen Lepidopteren-Fauna*“. Auf Grund vieljähriger Beobachtungen beschreibt und benennt der Vortragende die folgenden neuen Formen: *Aporia Crataegi* ab. *Kogi* (ganz schwarz), *Melitaea Cinxia* ab. *Horváthi* (dunkel), ab. *Uhryki* (fast zeichnungslos), ab. *Mocsáryi* (mit zerflossener Zeichnung), *Melitaea Phoebe* Kn. ab. *Geyeri* (wenig gezeichnet), *Argynnis Dia* L. ab. *Hudaki* (Unterflügel fast ganz schwarz), *Melitaea Didyma* O. ab. *Fischeri* (wenig gezeichnet), *Melanargia Japygia* Hbst. ab. *immaculata* (wenig gezeichnet), *M. Galatea* L. ab *Franzenaui* (mit fahlbrauner Zeichnung), *Lycaena Bellargus* Rott. ab. *Czekellii* (graublau), ab. *parvipunctata* (unten mit wenig Augen), ab. *confluens* (unten mit verbundenen Augenflecken), *Hipparchia morio* L. ab. *Nátlyi* (fahle Färbung), *Calophasia casta* Bkh. ab. *Birói* (sehr dunkel), *Boarmia gemmaria* Brahm ab. *Rebeli* (schwarz), *Arctia caja* L. ab. *flava* (Hinterflügel gelb), *Arctia Hebe* L. ab

Wassii (Hinterflügel gelb), *Zygaena carniolica* Sc. ab. *Vángeli* (mit ungerandeten Flecken); ferner *Chilades trochilus* Frr. var. *grisea* (Cypern) und *Thecla Ilicis* ab. *Founteinei* (Tunis). Die beiden letzteren sind licht gefärbt.

2. Zoltan Szilády legt eine Abhandlung über „*Tiernamen in der ungarischen Volkssprache*“ vor.
3. Vidor Tafner liefert „*Beiträge zur Milbenfauna Ungarns*“ und zählt die seit dem Erscheinen des Faunenkatalogs (Fauna Regni Hungariae, Budapest 1906, Bd. Arthropoda) entdeckten, für Ungarn bisher nicht nachgewiesenen Milben-Arten auf und beschreibt deren vier neue, und zwar: *Analges intermedius*, *Oribata globuloides*, *O. Apáthyi* und *Notaspis hungarica*. Der Vortrag erschien dem ganzen Umfange nach in *Állattani Közlemények* (IV. Bd., 1905, p. 140—152. Mit 15 Figuren).

B) Fachsektion für Botanik.

(Referiert von J. Bernátsky.*)

Sitzung am 12. Oktober 1904.

1. Nach Begrüßung der Versammelten und Eröffnung des neuen Sitzungszyklus seitens des Vorsitzenden Julius Klein erfolgt die Wahl eines zweiten Vorsitzenden an Stelle des verstorbenen Mitgliedes M. Staub. Auf Grund des Wahlergebnisses wurde S. Mágocsy-Dietz zweiter Vorsitzender.
2. G. Fábiáns (Székesfehérvár) Arbeit „*Ein interessanter Maisstengel*“ wird vorgelegt von K. Schilberszky. Es handelt sich hauptsächlich um einen Blütenstand von *Zea Mays*, dessen unterer Teil einen gewöhnlichen weiblichen Kolben vorstellt, am obern Teil sind aber männliche Blüten vorhanden; die Spitze des Kolbens wird abermals von weiblichen Blüten eingenommen.
3. Ö. Nagy (Szászváros) sandte einen Bericht ein, in dem ebenfalls von einem teratologisch ausgebildeten Maiskolben die Rede ist; der betreffende Kolben trug an seinem ganzen obern Teil, auch an der Spitze, männliche Blüten. Außerdem wird in dem Bericht eines Kürbisstengels Erwähnung getan, der an hochgradiger Fasziation litt und an dessen Spitze eine große Anzahl männlicher Blütenknospen zu einem quastenartigen Gebilde vereint war.
4. A. Fanta (Székesfehérvár) legt eine Weintraube (*Chasselas-rougé*) vor, an der mehrere grüne Beeren mit scharf gekennzeichneten roten Streifen zur Entwicklung gelangten. J. Klein erklärt die Erscheinung, indem er auf die Fremdbestäubung hinweist und in Er-

* Mit Berufung auf die Sitzungsberichte erschienen in *Növénytani Közlemények* 1904—1905.

innerung bringt, daß bekanntlich an Maiskolben zwischen obligaten gelben Körnern auch graue, selbst auch bunte erscheinen.

5. M. Futós (Kolozsvár) Arbeit „*Polypodium vulgare L. und Polypodium vulgare β serratum* Willd." wird vorgelegt von J. B. Kümmerle. Der im Titel in zweiter Reihe genannten Form wird in den meisten Werken eine untergeordnete systematische Bedeutung zuerkannt. Erst von Christ wird sie als subspecies hingenommen. Verfasser untersuchte sie eingehend und kommt zu dem Resultat, daß auf Grund der morphologischen Gestaltung des Wedels, der Aderung und des Sporangiumringes ein so prägnanter Unterschied zwischen *P. vulgare L.* und *β serratum* Willd. zu konstatieren ist, daß letztere Form nicht bloß eine „südliche Rasse" oder „mediterrane Unterart", sondern eine selbständige gute Art repräsentiert.
6. M. Péterfis (Déva) Arbeit „*Die Torfmoose Ungarns*" wird vorgelegt von K. Schilberszky.
7. H. Rehms (München) Arbeit „*Contributiones mycologicae ad floram Hungariae*" wird vorgelegt von B. Augustin. Die Arbeit enthält eine Anzahl neuer Arten.
8. A. Scherffel (Igló) bespricht unter dem Titel „*Chionaster nivalis (Bohlin) Wille in der Hohen-Tátra*" diesen, bisher von den Schneefeldern Skandinaviens bekannten Schneebewohner; er entdeckte ihn in einer vom Gymnasiallehrer R. Roth bei den „Fünf Seen" in der Hohen Tátra gesammelten Schneeprobe, wo „roter Schnee" nicht zugegen war. *Chionaster nivalis* kommt somit auch auf nicht-rotem Schnee vor. Es ist auf Grund mehrerer anderer Funde anzunehmen, daß dieser Organismus in der Hohen Tátra allgemein verbreitet ist.
9. J. Tuzson (Budapest) zeigt vor und erklärt „*einen neuen mikroskopischen Meßapparat*", der auch in der „*Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie*" näher beschrieben wurde.
10. Schriftführer J. B. Kümmerle liest ein während der Ferien eingelaufenes Schreiben von Ignaz Gerstner, Probst-Pfarrer zu Pápa-Teszér vor. Die botanische Sektion hatte seinerzeit für die gelegentlich eines Ausfluges der Sektion in den Bakonyer Wald von Gerstner gewährte gastlich-liebenswürdige Aufnahme ein Dankschreiben an ihn gerichtet. Gerstner gibt in dem vorgelesenen Schreiben seiner Freude Ausdruck, der botanischen Sektion und somit auch der Wissenschaft einen Dienst erwiesen zu haben.

Der Schriftführer meldet schließlich, daß Professor Paul Ascherson in Berlin gelegentlich seines 70. Geburtstages auch seitens der Sektion telegraphisch begrüßt wurde.

Sitzung am 9. November 1904.

1. A. Kerékgyártó (Budapest) hält einen Vortrag: „*Die Blütenpflanzen Ungarns in bezug der Farbe*". Nach Zählungen des Verf. verteilen

sich die Pflanzen mit farbigen Blüten in Ungarn folgendermaßen: weiß 32,87 %, gelb 27,47 %, rot 20,7 %, blau 12,32 %, lila 6,85 %, braun 0,42 %.

2. J. B. Kümmerle hält einen Vortrag über „*Marsilea quadrifolia in der Flora von Budapest*". Vortragender fand im Herbarium des Ungarischen Nationalmuseums ein Belegexemplar für die Tatsache, daß wenigstens vor Jahren *Marsilea quadrifolia* auch in der Nähe von Budapest vorkam. Daran anknüpfend verhandelt er die Nomenklatur dieser Pflanze und gelangt zu dem Resultat, daß ihr richtiger Name *Lemma quadrifolia (L.) Lam.*, der von *Salvinia natans* aber *Marsilea natans L.* zu lauten hätte.

Zum Schlusse werden noch mehrere geschäftliche Angelegenheiten der Sektion erledigt.

Sitzung am 14. Dezember 1904.

1. E. Gombócz legt seine Arbeit über „*Die Pflanzengeographie und die Flora des Soproner Komitates*" vor. Der erste Teil der Arbeit handelt über die geographischen Verhältnisse, der zweite über die Geschichte der botanischen Erforschung, der dritte über die Verteilung der Vegetation des Komitates. Es werden insgesamt 1561 Phanerogamen und 26 Pteridophyten namhaft gemacht.
2. G. Lengyel berichtet über neuere Erscheinungen in der Flora der Umgebung von Budapest.
3. S. Mágocsy-Dietz legt einige *Taxus*-Zweige vor, die Professor D. Laczkó vom Miklóspálhegy bei Szentgál, Veszprémer Komitat, eingesandt hatte. Es geht daraus hervor, daß *Taxus baccata* in in jener Gegend tatsächlich noch wild vorkommen dürfte.
4. Die Arbeit G. Moesz' (Brassó) „*Pflanzenteratologische Nachrichten aus Brassó*" wird vorgelegt von N. Filarszky. In der Arbeit sind auch mehrere bisher gänzlich unbekannte pflanzenteratologische Fälle angemerkt.
5. R. Rapaics hält einen Vortrag über die geschichtliche Einteilung der ungarischen botanischen Literatur. Es sprachen zu dem Gegenstand noch die Herren J. Ernyey und S. Mágocsy-Dietz. Sie gaben der Ansicht Ausdruck, daß die vom Vortragenden in Vorschlag gebrachte Einteilung einer näheren Prüfung unterzogen werden solle.
6. F. Gabnay berichtet über die Vermögenslage der Sektion und zum Schluß dieser letzten Sitzung im laufenden Jahre wünscht der Vorsitzende Julius Klein den Versammelten ein glückliches neues Jahr.

Sitzung am 11. Januar 1905.

1. B. Augustin hält einen Vortrag: „*Beiträge zur Kenntnis der Entwicklung und vergleichenden Anatomie der Paprikafrucht*". Vor-

tragender befaßt sich sowohl mit der Entwicklung der Blütenteile, insbesondere der Antheren, des Pollen und der Narbe, als auch mit der Frucht selbst. In letzterer entwickelt sich nach ihrer vollkommenen Ausbildung ein „verkorktes Collenchym", nachträglich die Capsaicin enthaltenden Drüsen und der Farbstoff. Das „verkorkte Collenchym" erreicht bei den verschiedenen Paprikasorten eine verschiedene Dimension, es kann aus bloß 1, aber auch aus 7—8 Zellschichten bestehen.

2. J. Ernyey bespricht ein Werk von Szikszai Fabricius (Kovács) aus dem Jahre 1590, das vom Standpunkte der Geschichte der ungarischen Botanik einiges Interesse beansprucht.
3. J. Tomek hält einen Vortrag über den Zusammenhang zwischen *Ozonium stuposum Pers.* und *Agaricus (Collybia) velutipes Curtis.* Nach dem Vorkommen auf Bäumen im botanischen Garten der Universität in Budapest zu schließen, scheint erstere Art das sterile Mycelium des letztern Pilzes vorzustellen.

Zum Schlusse verliest der Schriftführer J. B. Kümmerle einen ausführlichen Bericht über die Tätigkeit der botanischen Sektion in dem in mehreren Hinsichten hervorragenden Jahre 1904.

Sitzung am 8. Februar 1905.

1. G. Lengyel hält einen Vortrag unter dem Titel: „*Floristische Beiträge aus dem nördlichen Teil des Heveser Komitates*". Was bisher aus diesem Komitat floristisch bekannt war, bezog sich fast ausschließlich auf das Mátragebirge, dagegen war sowohl die südlich davon gelegene Ebene als auch der nördliche, gebirgige Teil des Komitates nahezu ganz unbekannt. So ist es nicht zu verwundern, daß Verf. 450 für das Komitat neue Pflanzenarten namhaft machen konnte; darunter werden die folgenden besonders hervorgehoben: *Equisetum maximum Lam.* form. *serotinum (A. Br.): Melica transsylvanica Schur., Agropyrum trichophorum (Link.) Richt., Iris graminea L., Quercus sublobata Kit., Rosa caryophyllacea Bess.* form. *Zalána Wiesb., Rosa dumetorum Thuill., Hypericum acutum Mönch, Astrantia major L., Scrophularia Neesii Wirtg., Campanula persicifolia L.* var. *hispida Lej., Achillea lanata Sprg., Centaurea spuria Kern., Cirsium rákosiense Simk. (palustre × horidum).*
2. S. Mágossy-Dietz hält einen Vortrag über *die Fichte in der Tátra* und weist zugleich eine Anzahl am Standort aufgenommener Photographien vor, die namentlich die Einwirkung des Windes auf den Wuchs der Fichte veranschaulichen.

Vortragender zeigt ferner mehrere Photographien vor, die den Unterschied zwischen der Vegetation des dunklen geschlossenen und des lichten Waldes charakteristisch erkennen lassen.
3. A. Szigethi-Gyula hält einen Vortrag unter dem Titel: „*Beiträge*

zur Anatomie der Vitiswurzel mit besonderer Rücksicht auf die durch die Phylloxera verursachte Beschädigung". Die Anzahl, Größe und Form der Wurzelhaare ist bei den verschiedenen *Vitis*-Arten nicht gleich, sodaß infolgedessen die Saugkraft bei den europäischen und den amerikanischen Rebensorten eine verschiedene ist. Noch mehr veränderlich ist die Zahl der Gefäßbündel bei ganz gleichem Alter der Wurzel. Infolge der Reblausbeschädigung schwellen die betroffenen jungen Wurzelteile stark an, es erscheinen die bekannten knotenartigen mehr oder minder gekrümmten Anschwellungen, die aber bei den amerikanischen *Vitis*-Arten bei weitem nicht in dem Maße auftreten, wie bei den einheimischen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die anatomische Struktur, namentlich der Rindenteil der Einwirkung der Phylloxera bedeutend bessern Widerstand leistet.

Zu dem Gegenstand sprechen J. Tuzson und S. Mágocsy-Dietz und als Resultat eines längeren Ideenaustausches wird insbesondere eine Einigung betreffs der ungarischen anatomischen Fachausdrücke erzielt, indem die ungarische Botanik die botanisch-anatomischen Ausdrücke hauptsächlich der deutschen Literatur entlehnte, die Ampelographen dagegen mehr der französischen Literatur folgten.

4. L. Thaisz zeigt seine in Angriff genommene Arbeit unter dem Titel: „*Vorarbeiten der Flora des Csanáder Komitates*" vor und bespricht die Ergebnisse seiner bisherigen Forschungen über dieses, bisher sehr wenig durchforschte Komitat.

Sitzung am 8. März 1905.

1. B. Augustin bespricht unter dem Titel: „*Untersuchungen über die ungarische Seifenwurz*" die anatomischen Verhältnisse der Wurzel von *Gypsophila paniculata* im Vergleich mit denen der Wurzel von *Glycyrrhiza echinata*. In neuerer Zeit kam es öfter vor, daß die Seifenwurzdroge mit der genannten in Ungarn stellenweise massenhaft auftretenden *Glycyrrhiza*-Art verfälscht wurde. Sowohl morphologisch als auch anatomisch und auch chemisch sind beide voneinander sicher zu unterscheiden.

Zu dem Gegenstand sprechen Julius Klein und F. Gabnay.

2. Á. Kerékgyártó hält einen Vortrag unter dem Titel: „*Die Wärmesummen inbezug auf die pflanzengeographische Verbreitung von Castanea vesca*". Mit Benutzung der von M. Staub vielfach angewandten Wärmeschwelle — 0^0 — berechnete Verf. die für die Blütezeit und Fruchtreife von *Castanea* nötige minimale, optimale und maximale Wärmesumme von 103 Orten. Am Festlande beträgt das Minimum der Blütezeit 1000^0 C., der Fruchtreife 2500^0, das Maximum der Fruchtreife 6000^0. In der Folge unterscheidet Vortragender sechs Zonen, und zwar kommt *Castanea* in der ersten Zone wild und spontan vor, tritt auch waldbildend auf. In der

zweiten Zone wird der Baum angepflanzt, verwildert aber auch. In der dritten wird er angepflanzt und reift die Früchte unbedingt jedes Jahr. In der vierten ist die Fruchtreife nicht sicher. In der fünften wird *Castanea* als Zierbaum gehalten und bringt niemals reife Früchte. In der sechsten Zone endlich findet man *Castanea* bloß als Strauch. Auf den Britischen Inseln beträgt aber das Minimum der Blütezeit 800°, der Fruchtreife 2000°, so daß also die Wärmesummen allein nicht als maßgebend betrachtet werden dürfen.

An den Vortrag anknüpfend fügen S. Mágocsy-Dietz, Julius Klein, J. Tuzson und K. Schilberszky mehrfache Bemerkungen namentlich zur Frage des Wertes der Wärmesummen, der maßgebenden Wärmeschwelle und einiger modifizierenden Nebenbedingungen hinzu.

3. Z. Szabós in Breslau beendigte Arbeit „*Einige Pflanzen aus dem Kaukasus*“ wird vorgelegt von L. Thaisz.
4. J. Wolcsánskys Arbeit: „*Beiträge zur Moosflora Ungarns*“ wird vorgelegt von K. Schilbersky.
5. S. Mágocsy-Dietz hält einen Vortag „*Über die Frucht von Paliurus aculeatus Lam.*“ Auf Grund der Herbarexemplare des botanischen Gartens der Universität in Budapest konnte Vortragender feststellen, daß die Breite des Flügels der *Paliurus*-Frucht veränderlich ist. Von Fiume erhielt Vortragender sogar eine ungeflügelte *Paliurus*-Frucht. Ob es sich dabei um bisher vielleicht übersehene spezifische Unterschiede handelte, ist noch näher zu erforschen.

Schriftführer J. B. Kümmerle teilt schließlich mit, daß die Reihenfolge der Vortragenden in den botanischen Sitzungen wie bisher auch in Zukunft nach alphabetischer Ordnung festgesetzt wird und davon nur aus besonders wichtigen Anlässen abgesehen werden kann.

Sitzung am 12. April 1905.

1. S. Mágocsy-Dietz hält einen Vortrag: „*Über die Gestalt des Blattes von Convolvulus arvensis L.*“ Das Laubblatt dieser Pflanze ist außerordentlich veränderlich. Als Grundtypus hat man die pfeilförmige Gestalt zu betrachten, von der ausgehend eine ganze Reihe Übergangsgestalten zu anderen Formen beobachtet werden können. Da zwischen den extremen Formen nicht nur Übergangsstadien zu finden sind, sondern erstere zuweilen auch auf ein und demselben Individuum auftreten, so ist es durchaus verfehlt, auf Grund der Blattgestalt systematische Formen aufzustellen. So sind u. a. die im Sommer auf Weinreben sich windenden Exemplare der Pflanze zumeist mit sehr breiten Blättern begabt, wogegen die im Herbste dem Boden anliegenden Exemplare durch sehr schmale Blätter aus-

gezeichnet sind. Vortragender schließt aus seinen Beobachtungen darauf, daß die auffallende Veränderung des Blattes von *Convolvulus arvensis* in klimatischen und terrestrischen Verhältnissen ihre Ursache hat und wir es somit hier mit einem sicheren Falle von Anpassung zu tun haben.

L. v. Thaisz bekräftigt letztere Ansicht des Vortragenden und betont besonders die Fragwürdigkeit der Berechtigung dessen, daß auf Grund der verschiedenen Blattgestalt neue systematische Formen aufgestellt und diese mit eigenen Namen belegt werden.

2. S. Jávorka berichtet „*Über einen Bastard zwischen Vinca herbacea WK. und V. minor L. im Herbarium des botanischen Gartens der Universität in Budapest*“, der im Gebirge bei Budapest gefunden und von seinem Entdecker F. Sándor *Vinca hybrida* benannt wurde.

Es folgen amtliche Beratungen und Verhandlungen, u. a. auch in bezug der Erhaltung der Naturdenkmäler in Ungarn und der Erforschung der einheimischen Vegetation.

Sitzung am 10. Mai 1905.

1. K. Balkányis (Debreczen) Arbeit: „*M. Fazekas als Naturforscher*“ wird vorgelegt von A. Kubacska. Die Arbeit ist für die Entwicklung der ungarischen Botanik von Interesse.
2. R. Sztankovits hält einen Vortrag unter dem Titel: „*Beiträge zur Anatomie der Frucht der einheimischen Quercus-Arten*“ und behandelt die Anatomie der Früchte von *Quercus pedunculata Ehrh.*, *Qu. sessiliflora Sm.*, *Qu. lanuginosa Lam.*, *Qu. conferta Kit.* und *Qu. Cerris L.* mit besonderer Berücksichtigung der systematisch wertvollen Charaktere.

Sitzung am 30. Mai 1905.

1. Vorsitzender J. Klein berichtet schmerzerfüllt über das Ableben des Mitgliedes der botanischen Sektion, B. Kontúr, der namentlich mit seinen der biblischen Geschichte entnommenen Themen botanischen Inhalts die ungarische botanische Literatur bereicherte.
2. N. Filarszky hält einen Vortrag „*Über unsere Crocus-Arten mit zweifelhafter Benennung*“. Vortragender ist der Meinung, daß die in Ungarn verbreitete, durch ihre großen Perigonblätter an eine *Iris* erinnernde, in Kerners Flora exsiccata Austro-Hungar. XXXV, 1902, unter dem Namen *C. banaticus* ausgegebene *Crocus*-Art richtigerweise entweder *C. byzantinus (Bark.) Ker.* oder aber *C. iridiflorus Heuffel* zu heißen hat. Ferner sollte richtigerweise für die von Heuffel *C. banaticus* benannte Art dieser Name aufrecht erhalten bleiben, weswegen die für diese Arten aufgestellten Namen *C. Heuffelianus Herb.* und *C. Heuffelii Körn.* keinerlei Berechtigung haben. Schließlich weist Vortr. darauf hin, daß *C. banaticus Hfe.*

var. *scepusiensis* Tehm. et Woloszczak zu streichen ist, indem das Merkmal dieser angeblichen Varietät „differt a typo fauce perigonii parce pilosa“ auf falscher Beobachtung ruht, somit auch die Zipser Pflanze dem reinen Typus von *C. banaticus* entspricht.

3. J. Györffys (Makó) Arbeit „*Hymenostylium curvirostre (Ehrh.) Lindb. var. β scabrum Lindb. etc.*“ wird vorgelegt von K. Schilberszky.

4. J. Quint legt seine Arbeit „*Die Bacillarien des Römerbades nächst Budapest*“ vor. Er konnte insgesamt 147 Arten, darunter sechs neue, feststellen.

S. Mágocsy-Dietz hebt bezüglich der vom Verf. vorgelegten Arbeit hervor, daß sie aus dem unter der Leitung Professor J. Vángels stehenden biologischen Laboratorium des kgl. ung. Pädagogiums stammt, aus dem in neuerer Zeit schon mehrere botanische Arbeiten wissenschaftlichen Inhalts hervorgegangen sind.

Schließlich berichtet K. Schilberszky über die Vorkehrungen betreffs der im Interesse der Mitglieder des in Wien zusammentretenden botanischen Kongresses seitens der kgl. ung. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu arrangierenden Ausflüge in Ungarn.

C) Fachsektion für Chemie und Mineralogie.

(Referiert von Dr. Friedrich von Konek.)*

Sitzung am 25. Oktober 1904.

1. A. Zaitschek hielt einen Vortrag: *Zur Biochemie der Milch.* Er fand, daß der Pseudonukleingehalt verschiedener Milcharten bei künstlicher Verdauung mit Pepsinsalzsäure ein verschiedener ist. Die Frauen-, Stuten- und Eselsmilch ergibt keinen wägbaren Pseudonukleinrückstand, während bei Kuhmilch, auf 100 g Kaseïn berechnet, rund 8 g, bei Ziegenmilch 10 g und bei Büffelmilch 12 g Pseudonukleïn zurückbleiben. Ähnliche Unterschiede zeigte die Verdauung der rein dargestellten Kaseïne. Die pepsinsalzsauren Kaseïnlösungen werden durch Konzentration, durch Antiseptika, sowie durch die Art und Weise ihrer Bereitung wesentlich beeinflußt. Pepton, Pepsin, Trypsin oder glykolytische Enzyme wurden in den untersuchten Milcharten nicht gefunden, hingegen gelang der Nachweis eines stärkeverzuckernden diastatischen Enzyms in frischer Milch.

2. Th. v. Kosutány erstattete seinen Bericht: *Über die bisherigen Erfolge der die chemischen Untersuchungsmethoden landwirtschaftlicher*

* Diese Referate sind ursprünglich in der Chemikerzeitung erschienen.

Produkte zusammenfassenden Tätigkeit, und schlug die Wahl mehrerer Fachkommissionen vor.

3. Der Vorsitzende K. v. Than legte eine Mitteilung des Komitees für den VI. internationalen Kongreß für angewandte Chemie zu Rom vor und ersuchte einige Herren zur Bildung eines Komitees in Budapest, das die Aufgabe hätte, sich mit dem römischen Zentralkomitee in ständiges Einvernehmen behufs Erledigung aller kongreßlichen Angelegenheiten zu setzen.

Sitzung am 29. November 1904.

1. J. Pfeiffer spricht *über Braunkohlengas*. Er berichtet über seine im Gaswerke der Stadt Komárom ausgeführten praktischen Versuche, nach welchen sich das aus Braunkohlen (Tata) erhaltene Gas zur Speisung von Auerbrennern ebensogut eignet, wie das aus schlesischen Kohlen erzeugte sogen. Ostrauer Gas, das hier zu Lande bei der weitaus größten Anzahl städtischer Leitungen noch immer Verwendung findet. Da das ungarische Braunkohlengas infolge seines bedeutend höheren Kohlensäure- und niedrigeren Wasserstoff- und Methangehaltes spezifisch mehr als zweimal so schwer ist wie das Ostrauer Gas, so muß man, um den Auerbrennern die erforderliche Lichtstärke zu geben, dieses Gas unter weitaus stärkerem Gasometerdruck in die Leitungen pressen. Der verhältnismäßig hohe Schwefelgehalt der ungarischen Kohle bedingt fernerhin eine sorgsamere Entschwefelung dieses Leuchtgases, damit dessen Schwefelgehalt die gesetzlich festgestellte Norm nicht überschreite. Bei Innehaltung dieser wichtigsten Kautelen kann ungarisches Braunkohlengas in Auerbrennern ebenso gut verwendet werden, wie Steinkohlenleuchtgas.
2. B. Szilárd besprach die *neueren Verfahren zum Entwickeln der photographischen Platten bei Tageslicht*. Nach der älteren Lumière-schen Methode sind es hauptsächlich die mit Croceïn, Phenolphthaleïn und Luteol arbeitenden, die der Vortragende praktisch erprobte und vervollkommnete. Die so erzielten, sehr gelungenen Bilder erregten allgemeinen Beifall.

Sitzung am 20. Dezember 1904.

1. A. Leopold hielt einen Vortrag *über Kaolinbestimmung im Ton*. Der Vortragende skizzierte die wichtigsten Momente der Tonanalyse, indem er einen kurzen Rückblick auf die diesbezüglichen Arbeiten von Schöne, Bischoff, Ludwig und Seger warf und diese kritisch behandelte. Die Bestimmung der relativen Mengen von Kaolin, Mineralschutt und Sand im Ton geschieht gegenwärtig in der Weise, daß der Kaolin mit Schwefelsäure aufgeschlossen und

die amorphe Kieselsäure mit Hilfe von Soda oder Lauge in Lösung gebracht wird. Aus der Menge der Kieselsäure folgert man auf diejenige des Kaolins. Bezüglich der Konzentration von Soda oder Lauge konnte bisher keine Übereinstimmung erzielt werden. Neuerdings brachten Körner und Sjollema neue Methoden, die aber noch nicht kontrolliert wurden. Der Vortragende hat ein Verfahren ausgearbeitet, das darauf beruht, daß man den Kaolin durch Schwefelsäure zersetzt und aus der Menge der in Lösung gegangenen Tonerde auf die Menge des Kaolins folgert. Aus der vollständigen Tonanalyse ist die Menge der Gesamttonerde bekannt; die Differenz der beiden Bestimmungen ergibt, wie viel Tonerde in Form von Mineralschutt zugezogen ist. Multipliziert man letztere mit 5,41, so erhält man die Menge des Mineralschuttes. Man kann somit durch eine Tonerdebestimmung die ganze Frage lösen. Bei Zusammenstellung der Analyse wäre es angezeigt, außer den drei erwähnten Bestandteilen auch das Eisenoxyd und den kohlensauren Kalk in Betracht zu ziehen und deren Mengen anzuführen und diese nicht als Sand in Rechnung zu stellen.

2. Der Sekretär, L. v. Illosvay, verliest die Preisaufgabe des preußischen Ministeriums für öffentliche Arbeiten, betreffend die *Untersuchung hydraulischer Bindemittel.*

Sitzung am 13. Januar 1905.

1. Aur. v. Bartal gab in seinem Vortrage *über die Darstellung von Indigo* einen Überblick über die neuesten technischen Errungenschaften auf dem Gebiete der Indigoblausynthese.
2. Jos. v. Ferenczy sprach über *Antimonbestimmung in Legierungen* Der Vortragende bedient sich eines titrimetrischen Verfahrens, das sich auf die Arbeiten von L. Andrews und Györi stützt und eine rasche und genaue Bestimmung des Antimons auch in Gegenwart von Zinn, Kupfer, Blei, Arsen, Wismut, Eisen, Zink. Nickel ermöglicht. Auf Grund eigener Erfahrung empfiehlt der Vortragende folgendes Verfahren: Man siedet etwa 0,5 g Legierung mit 1—2 g. Jodkalium und 30—40 ccm konzentrierter Salzsäure eine halbe Stunde, bis das Antimon in schwammigen kleinen Stückchen zurückbleibt, während die übrigen Metalle in Lösung gegangen sind. Kaliumjodid muß stets in Überschuß vorhanden sein, da sonst die Salzsäure auch das Antimon auflösen würde. Das so gewonnene Antimon wird abfiltriert, mit heißem, Chlorkalium und Salzsäure enthaltendem Wasser gewaschen und in konzentrierter Salzsäure und Brom gelöst, der Überschuß des letzteren fortgekocht und das gebildete $SbCl_5$ durch schweflige Säure reduziert; nach Verjagung des Schwefeldioxydes titriert man — Indikator Methylorange — mit Kaliumbromid enthaltendem Kaliumbromat bis zum Verschwinden

der roten Farbe und bis der nächste Tropfen der Kaliumbromatlösung durch frei werdendes Brom die Lösung gelb färbt. Der Vortragende erhielt auf diese Weise bei Weißmetallen und anderen Legierungen gute Resultate. Der von NISSENSON für Kaliumbromattitrationen empfohlene Indigo hat sich nicht besser als Methylorange bewährt. Zweckmäßig verwendet man eine Kaliumbromatlösung mit 2,785 g Kaliumbromat und 30 g Bromkalium in 1 l; davon zeigt jeder Kubikzentimeter 0,036 Antimon an.

3. E. LÁSZLÓ demonstriert einen Schlämmapparat — hauptsächlich zur Gewinnung größerer Mengen geschlämmten Tones — und eine Waschflasche zum Trocknen der bei der Elementaranalyse gebräuchlichen Gase.

Sitzung am 28. Februar 1905.

1. E. LÁSZLÓ referierte über *Schwefelbestimmung in Pyriten.* Bekanntlich hat Prof. LUNGE-Zürich behufs Entscheidung der zwischen ihm und SILBERBERGER-Wien schwebenden, auf diesen Gegenstand bezüglichen Streitfrage Pyritmuster an verschiedene analytische Laboratorien mit der Bitte gesandt, diese nach beiden Verfahren analysieren zu lassen und die erhaltenen Resultate ihm zu übermitteln. Der Vortragende referiert über das Ergebnis der im technischen Laboratorium der hiesigen Technischen Hochschule ausgeführten Analysen und betont, daß die nach LUNGES Verfahren ausgeführten Bestimmungen mit LUNGES eigenen vollkommene Übereinstimmung zeigen, während die SILBERBERGERsche Methode größere Abweichungen ergeben hat; dieser haften noch die Übelstände an, daß sie infolge des Gebrauches von Alkohol für technische Analysen zu kostspielig und die Filtration der Strontianniederschläge zu langwierig ist. Es ist befremdend, daß auch die nach einer und derselben Methode ausgeführten Analysen verschiedener Analytiker größere Abweichungen zeigen als man von einer guten analytischen Methode erwarten darf.
2. J. PFEIFFER spricht über *Wasserreinigung mit Bariumverbindungen.* Ein Nachteil der wohl weitest verbreiteten und allgemeinster Anwendung fähigen Kalksodareinigungsmethode ist der Umstand, daß sich leicht lösliche Salze, Natriumchlorid und Natriumsulfat (aus der bleibenden Härte des Wassers) bilden, die den Siedepunkt des Speisewassers erhöhen und durch Ausblühen den Kessel korrodieren, unter Umständen sogar gefährden können. Um das zu umgehen, entfernt man den Gips auch teilweise mittels Bariumchlorid oder Bariumhydroxyd. Neuerdings wird zu diesem Zwecke gemahlener Witherit empfohlen; zuerst verwandte man das Baryumkarbonat zur Reinigung von Grubenwässern; dieses Verfahren führt nur dann zum Ziele, wenn der fein verteilte Witherit in Suspension bleibt,

d. h. das zu reinigende Wasser ununterbrochen gerührt wird. Der Vortragende vergleicht dieses patentierte Verfahren mit der älteren Kalksodamethode. Während die Kalksodamethode wohl in den meisten Fällen verwendbar ist, ist das Barytverfahren nur bei gipshaltigen Wässern — also in weitaus selteneren Fällen — von Vorteil. Wenn z. B. Speisewässer auch noch Natriumsulfat gelöst enthalten, so wird das Baryumkarbonat in erster Reihe natürlich mit diesem reagieren, und wir erreichen somit gerade das, was wir durch dieses Reinigungsverfahren eben verhüten wollten, nämlich die Anreicherung löslicher Salze im Speisewasser; in solchen Fällen wird die Witheritmethode also nicht zum Ziele führen. Da sie auch noch kostspieliger ist als das ältere Verfahren und nur in seltenen Fällen Anwendung finden kann, verspricht ihr der Vortragende keine lange Lebensdauer.

Sitzung am 28. März 1905.

1. M. Balló bespricht eine in Gemeinschaft mit J. Rózsényi ausgearbeitete Methode zur *Bestimmung der schwefligen Säure in der atmosphärischen Luft.* Das in den „Vereinbarungen" vorgeschlagene Verfahren erwies sich — wegen der Flüchtigkeit des Jods — als unzuverlässig. Als durchaus brauchbar erwies sich nach den von Balló und Rózsényi angestellten Versuchen das Wasserstoffsuperoxyd, das auch in $\frac{n}{100}$-Chamäleonlösung entsprechender Verdünnung die schweflige Säure noch sicher und quantitativ oxydiert, wobei Verluste an Wasserstoffoxyd nicht stattfinden; das überschüssige Peroxyd wird mit eingestellter Chamäleonlösung zurückgemessen. Die auf diese Weise gefundene Schwefeldioxydmenge entspricht nahezu vollkommen der angewendeten. Zur Ermittelung des Schwefeldioxydgehaltes der Luft genügt es, 100 l — nachdem diese einen Baumwollfilter passierten — durch die die Wasserstoffsuperoxydlösung enthaltenden Absorptionsgefäße in ziemlich raschem Tempo ($1\frac{1}{2}$—2 Std.) hindurchzusaugen, worauf mit Chamäleon zurücktitriert wird. Als Oxydationsmittel wurde auch Chromsäure versucht, jedoch bei weitem nicht mit so günstigem Erfolge. Diese Versuche wurden im Zusammenhange mit der Frage nach dem hygienisch zulässigen Schwefelgehalte des Leuchtgases ausgeführt. Der Vortragende nimmt auf Grund der Angaben von Ogata u. a. (Vereinbarungen) als Höchstgrenze 80 g Schwefel in 100 cbm Leuchtgas an, schlägt aber vor, den Mindestgehalt von 0,02 Prom. Schwefeldioxyd — bei dem nach längerer Zeit schon geringe Symptome beobachtet wurden —, der Sicherheit wegen noch bedeutend herabzusetzen.

An diesen Vortrag schließt sich eine längere Diskussion, im Laufe welcher der Vorsitzende K. v. Than betont, daß auch er von

der großen hygienischen Wichtigkeit dieser Frage überzeugt sei, da die in menschlichen Wohnungen eingeatmete schweflige Säure sich im Organismus auf Kosten des Blutsauerstoffes zu Schwefelsäure oxydiere, die leicht gefährlich werden kann. Gleichzeitig empfielt er zur Oxydation des Luftschwefeldioxydes $\frac{n}{100}$-Jodsäurelösung, die lange nicht so zersetzlich wie Wasserstoffsuperoxyd ist und sich jodometrisch leicht und haarscharf titrieren läßt.

2. Aur. v. Bartal hält einen Vortrag über *Elementarsynthese in der organischen Chemie und ihre Wichtigkeit bei deren Studium.*

3. Lor. Lengyel referierte über seine die *Reaktionswärme der Pepsinverdauung* betreffenden Versuche. Der Vortragende hat seine vorläufig nur qualitativen Versuche in der Weise ausgeführt, daß er die Verbrennungswärme des Systems vor und nach der Verdauung in der Berthelot-Mahlerschen Bombe bestimmte. Als Verdauungsobjekt bediente er sich Merkschen Ovalbumins, während die Verdauungsflüssigkeit durch Auflösen Merkschen Pepsins in $\frac{n}{10}$-Oxalsäure bereitet wurde. Die Versuche wurden mit genau abgewogenen Albumin- und Pepsinmengen ausgeführt. Hierauf wurde die Verbrennungswärme der gesamten Substanz ohne und nach verschieden vorgeschrittener Verdauung bestimmt. Über das Fortschreiten der Verdauung vergewisserte sich der Vortragende in der Weise, daß er in gleich lange währenden Parallelversuchen qualitative Prüfungen auf negatives Eiweiß, Albumosen, Pepsin, bezw. deren Mengen anstellte. Nach zehntägiger Verdauung war die Menge des koagulierbaren Eiweißes nur noch ganz minimal, und die Verbrennungswärme der so entstandenen Gesamtsubstanzen zeigte — verglichen mit jener ohne Verdauung bestimmten — keine nennenswerten Unterschiede. Der Vortragende folgert hieraus, daß die Reaktionswärme der Pepsinverdauung, wenigstens im Falle von Albumin, nur sehr gering sein könne.

4. J. Szilasi lieferte einige *Beiträge zur Milchuntersuchung.* Von 650 untersuchten Proben waren 56 % verfälscht. Der Vortragende wendet sich gegen die Grenzzahlen in der zur Kontrolle des Milchfettes dienenden Formel: $x = t \cdot 0{,}8\,\frac{s-1}{0{,}005}$; wenn t z. B. den Grenzwert 12 % hat, so würde sich x (Milchfett) zu 2,8 % ergeben, welche Zahl bekanntlich den Tatsachen nicht entspricht, da der praktisch bestimmte Fettgehalt der Milch nur ausnahmsweise unter 3 % sinkt. Differenzen zwischen verschiedenen Analytikern können auch dadurch entstehen, daß manche t und x auf 100 ccm, andere wiederum auf 100 g Milch beziehen; eine endgültige Einigung in dieser Beziehung scheint dringend geboten. Schließlich zählt der Vortragende einige Fälle abnorm zusammengesetzter Milch aus seiner eigenen Praxis auf.

In der hierauf folgenden Diskussion bemerkt Th. v. Kosutány, daß der Vorschlag zur Einigung über einige Fragen der Milchanalyse bereits gemacht wurde, und die Werte von l (Gesamtmenge der gelösten Stoffe) und x sollen sich fernerhin ausschließlich nur auf 100 g Milch beziehen.

5. B. Szilárd hält einen Vortrag über *Radioaktivität des Bitterwassers von Igmánd.* Aus den Ausführungen des Vortragenden und den vorgelegten ziemlich scharfen Radiographien geht hervor, daß auch dieses Mineralwasser Radium unter die Faktoren seiner fixen Bestandteile zählen darf.

Sitzung am 30. Mai 1905.

1. A. v. Sigmond sprach *über die chemische Zusammensetzung der gebundenen „Szik"(Soda)böden des Theißtales.* Der Vortragende überzeugte sich bereits früher davon, daß der Hauptbestandteil der wasserlöslichen Bodensalze solcher Böden das Glaubersalz ist. Die Soda kommt meistens nur stellenweise noch zur Geltung, während der Kochsalzgehalt ausnahmslos als untergeordneter zu bezeichnen ist. Jetzt beweist der Vortragende, daß die löslichen Natronsalze, die zumeist Verwitterungsprodukte sind, sich naturgemäß an solchen Orten in erheblicher Menge anhäufen, deren Untergrund undurchlässig ist, und somit ihre Auslaugung verhindert. Der salzsäurelösliche Anteil solcher Bodenarten ist durchaus geringer als in gewöhnlichen Humusschichten, und zwar schwankt seine Menge innerhalb 50 bis 70 %. Die lösliche Kieselsäure findet sich meist in beträchlicher Menge, 10—20 %; dieser Umstand beweist, daß sich die Verwitterung in ziemlich vorgerücktem, die Auslaugung hingegen noch im Anfangsstadium befindet. Zumeist überflügelt die lösliche Kieselsäure die Tonerde dergestalt, daß eine Folgerung auf das Vorhandensein zeolithartiger Verbindungsstufen nicht ungerechtfertigt erscheint. Auf das Absorptionsvermögen letzterer wird auch der auffallend hohe Kaligehalt dieser Bodenarten zurückzuführen sein, der gewöhnlich um 1 % herum schwankt. Umgekehrt finden sich mitunter auch Böden von sehr strenger physikalischer Beschaffenheit, deren Tonerdegehalt bis doppelt so groß ist als die Menge der löslichen Kieselsäure; es sind dies Böden, in denen die löslichen Salze keinen schädlichen Einfluß auszuüben vermögen, und deren äußerst ungünstige physikalische Beschaffenheit sie für Bodenbearbeitung ungeeignet macht. Der Vortragende vermutet, daß auch das freie $Al_2(OH)_6$ die Bündigkeit des Bodens ungünstig beeinflusse, und fügt hinzu, daß diese Böden fast durchweg kalkarm sind. Ihr Stickstoffgehalt ist als mittelgroß zu bezeichnen, jedoch sind die Verhältnisse für die Nitrifikation ungünstig. Mittelgroß ist auch der Gehalt an Gesamtphosphorsäure, ihre Löslichkeit jedoch meistens

ungenügend. Die Löslichkeitsverhältnisse der Bodenphosphorsäure involvieren eine mäßige Phosphorsäuredüngung; der reiche Kaligehalt dieser Bodenarten läßt eine Kalidüngung auf lange Zeit als aussichtslos erscheinen.

2. J. Weiser referierte im Namen von Fr. Tangl und J. Weiser *über den Glyzeringehalt des Blutes.* Die chemischen Prozesse des tierischen Organismus spalten die mannigfaltigen Glyzerinester in einfachere Verbindungen. Die Verf. studierten die Frage, ob sich in irgend einem Stadium dieser Zersetzung nicht etwa freies Glyzerin bilde, und somit dieser Alkohol als ständiger Bestandteil des Blutes zu betrachten wäre. Zu diesem Zwecke wurde Rinder- und Pferdeblut einer umständlichen fraktionierten Behandlung unterzogen, die hauptsächlich die quantitative Entfernung von Eiweiß, Glyzerinphosphorsäure, Lecithin und ähnlichen leicht Glyzerin abgebenden Substanzen bezweckte; in dem auf diese Weise erhaltenen Endprodukte bestimmten die Verf. das Glyzerin nach der Zeisel-Fantoschen Methode als Isopropyljodid und stellen den Satz auf, daß tierisches Blut tatsächlich freies Glyzerin enthalte, dessen Menge durchschnittlich 70 mg in 1 kg betrage.

D) Fachsektion für Physiologie.

(Mit Benutzung der Protokolle referiert von Dr. Rudolf Picker.)

Sitzung am 18. Oktober 1904.

Dr. Josef Guszmann hielt einen Vortrag, betitelt: „*Experimente mit Implantation von Hautteilen*". Aus den Versuchen von Kaufmann, Schwenninger und Ribbert ist bekannt, daß die Implantation von Hautteilen unter die Haut sehr oft die Entwicklung von Epidermalzysten zur Folge hat. Die Versuche des Vortragenden ergaben von den bisherigen, sowohl was die Versuchsmethode als auch was die Größe und Unterbringung des implantierten Hautstückes anbelangt, bedeutende Abweichungen, und seine Resultate brachten auch teils neue, teils ergänzende Daten.

Die erlangten Resultate können im Folgenden zusammengefaßt werden:

1. Durch Hautimplantation gelang es fast ohne Ausnahme Zysten hervorzubringen.
2. Ein Teil der Zystenwand besteht aus der implantierten Haut, während der übrige Teil sich neu bildet. Das bindegewebige Anteil der neu entstandenen Zystenwand bildete sich aus dem alten subkutanen Bindegewebe, während der Epidermalüberzug aus der fortgewucherten Epidermis der implantierten Haut stammt.

3. Die Epithelwucherung, die die Grundlage der Zystenbildung ist, offenbart sich in zweifacher Art: Die eine Art verfolgt den Typus, der seit den Versuchen Kaufmanns u. a. bekannt ist, und darin besteht, daß das Epithel vom Rande des implantierten Hautteiles auf das benachbarte Bindegewebe übertritt und es langsam überkleidet. Demgegenüber vollzieht sich die andere Art der Epithelisierung in der Weise, daß das wuchernde Epithelgewebe von der Epidermaloberfläche des implantierten Hautteilchens auf das gegenüberliegende Bindegewebe übertritt, von wo aus es sich dann auf dessen Oberfläche verbreitet. Das Epithelgewebe des implantierten Hautlappens gelangt auf das gegenüberliegende Bindegewebe, daß es als Leitbahn die durch das Abtragen der Koriumpapillen entstandenen, größtenteils brückenartigen intrazystorischen Verbindungen benutzt.
4. In dem neugebildeten Teile der Zystenwand fällt außer der großen Verschiedenheit des mehrschichtigen Epithelüberzugs hauptsächlich auf, daß vereinzelt mehr oder weniger Haarbälgen gleichende Bildungen vorkommen, die man als Resultate der sekundären Implantation ansehen muß.
5. Die in Punkt 4 angeführten Eigenschaften führen zu dem wichtigen Resultate, daß die künstlich hervorgerufenen Zysten, was deren Konstruktion anbelangt, in ihrer ganzen Ausdehnung den einfachen Dermoidzysten sehr nahe stehen.

An der auf den mit mikroskopischen Demonstrationen und Projektionen verbundenen Vortrag folgenden Diskussion nahmen Edmund Kromstecher, Kolomann v. Tellyesniczky, Wilhelm Goldzieher und Ferdinand v. Klug teil.

Sitzung am 6. Dezember 1904.

1. Géza Mansfeld trug unter dem Titel „*Inanition und Narkose*“ über seine Versuche vor, die sich auf die durch betäubende Mittel an durch Inanition geschwächten Individuen hervorgerufenen Wirkungen beziehen. Seine Versuche stellte er an Kaninchen an, die 4 bis 10 Tage hungerten und dursteten, teils bloß hungerten. Einen Teil der Narcotica bekamen sie peroral, den andern Teil subkutan. Zu seinen Versuchen benutzte er Chloralhydrat, Paraldehyd, Äthylalkohol, Morphin, Amylenhydrat und Äthylurethan. Das Resultat war, daß die Wirkung des Chloralhydrates, Morphiums und Paraldehyds bei der Inanition sich bis zum höchsten Grade steigert, die Wirkung des Äthylalkohols, Amylenhydrats und Äthylurethans jedoch unverändert bleibt. Zur Erklärung dieses abweichenden Verhaltens obiger Mittel bringt er seine Resultate in Zusammenhang mit der Hypothese von Meyer-Overton, wodurch er zu beweisen

imstande ist, daß die Wirkungssteigerung bei der Inanition als Maß der Toxizität der Narcotica gelten kann, und bringt somit zugleich auch den ersten experimentellen Beweis für die Richtigkeit der erwähnten Hypothese bei den Prozessen, die im Körper höher stehender Tierarten vorgehen.

Rudolf Bálint: „*Die Störung der Aufmerksamkeit bei Affektionen der Hemisphären*". Er stellt einen Kranken vor, bei dem eine Sehstörung vorhanden ist, die jedoch nicht von einer Erkrankung des Sehapparates stammt. Außerdem besteht noch eine Störung der Bewegung der Hände. Nach eingehender Besprechung des vorliegenden Falles faßt er diese Störungen in folgenden Punkten zusammen:

1. Die Störungen der Handbewegungen bestehen darin, daß alle Bewegungen, welche durch die Augen kontrolliert werden, inkoordiniert sind. Die Koordination ersetzt der Kranke dort, wo das möglich ist, durch andere Sinne.
2. Der Kranke sieht von mehreren Gegenständen immer nur diejenigen, die am meisten nach rechts zu liegen kommen.
3. Beim Fixieren eines Gegenstandes hat der Kranke keine Kenntnis von den andern an der Peripherie liegenden Gegenständen, erlangt aber sofort Kenntnis von denselben, sowie seine Aufmerksamkeit auf dieselben gelenkt wird.
4. Die Ortsveränderung der Aufmerksamkeit des Kranken ist erschwert, und zwar eher von rechts nach links, als umgekehrt.

Darauf geht der Vortragende zur Erklärung der einzelnen Symptome über. Die Störung der Handbewegungen wird von der Läsion derjenigen Bahnen bewirkt, die das Sehzentrum mit den kinoesthetischen Zentren der Hand verbinden.

Zur Erklärung dieser Störung der Aufmerksamkeit demonstriert B. an einem Versuchstier (Hund), bei dem die rechte Seite des Hinterhauptlappens lädiert ist. Der Hund ergreift von zwei im rechten Sehfeld liegenden Fleischstücken nicht das ihm näher liegende zuerst, sondern immer das am weitesten rechts liegende Stück. Dies kommt daher, daß wegen der Läsion der rechten Hemisphäre die Innervation der linken Hemisphäre stärker zur Geltung kommt, wodurch die Innervation des ganzen Tierkörpers einen mehr ausgeprägten rechtsseitigen Charakter erhält.

Bei demselben Hunde kann man auch noch beobachten, daß seine Aufmerksamkeit sich leichter in der Richtung der lädierten Seite bewegt als in der entgegengesetzten. Die an dem Kranken beobachtete dritte Störung der Aufmerksamkeit kann B. jedoch nicht erklären.

Sodann behandelt er kurz die Psychophysiologie der Aufmerksamkeit, sowie die Möglichkeit der Lokalisation der Affektion.

Sitzung vom 31. Januar 1905.

1. Ernst Tesner hielt einen Vortrag unter dem Titel: *„Die physiologischen Schwankungen der chemischen Zusammensetzung des Speichels"*. Von den Grundbestandteilen des Speichels befaßte er sich mit dem Enzym, dem Rhodan und den anorganischen Salzen. Die Bestimmung des Enzyms kann unmittelbar nicht ausgeführt werden, weshalb er die Quantität der Eiweißsubstanzen des Speichels und die Verdauungsfähigkeit auf Grund der Reduktionskraft des verdauten Stoffes bestimmte. Die Quantität der anorganischen Salze kommt in der Alkalizität zum Ausdruck und ist somit durch Titrierung bestimmbar. Zur Bestimmung des Rhodans gelang es ihm, die Verwendbarkeit des photometrischen Verfahrens nachzuweisen.

Die Drüsenfunktion zeugt von spontanen Veränderungen, die am Tage während des Hungerns stattfinden. In der Frühe nach dem Aufstehen steigert sich die Wasserausscheidung so sehr, daß die Konzentration sämtlicher Bestandteile und die Verdauungskraft herabgesetzt ist; die letztere steigt von Vormittags 9 Uhr bis zu den späten Nachmittagsstunden und nachher sinkt sie wieder; in diesen Schwankungen begleitet sie die Quantität der organischen Substanzen und anorganischen Salze. Die Funktion der Speicheldrüsen steigt somit bis zum Nachmittags erreichten Maximum, Abends jedoch sinkt sie; auf diese Weise folgt sie den entsprechenden Veränderungen des ganzen Stoffwechsels, wie sie z. B. in der Körperwärme zum Ausdruck kommen.

In der während der Tageszeit bestimmten Funktion der Speicheldrüsen können verschiedene Faktoren Abweichungen bewirken. Das Kauen, Wasseraufnahme, Rauchen, die sauern, süßen und salzigen Schmeckreize steigern die Funktion der Drüsen, was in der Steigerung der Sekretion des Wassers, der organischen Bestandteile und der anorganischen Salze, sowie der Verdauungskraft zum Ausdruck gelangt. Die erwähnten Reize unterscheiden sich insofern voneinander, als ihre Wirkung auf die Sekretion der einzelnen Bestandteile nicht gleich groß ist. Die Speicheldrüsen reagieren somit auf verschiedene Reize in verschiedener Weise, mit andern Worten, sie besitzen eine spezifische Reizbarkeit. Beim Essen wirken die genannten einfacheren Reize zusammen ein, und so setzt sich die Gesamtwirkung aus diesen Einzelwirkungen zusammen; nur das Frühstück ist nicht imstande, die gerade auf diesen Zeitpunkt fallende spontane Konstruktionsverringerung aufzuhalten.

Die Konzentration des Rhodans sinkt bei jedem Reiz, auch beim Essen, die Rhodansekretion jedoch steigt zur selben Zeit: die Bildung des Rhodans ändert sich somit parallel mit der Sekretion der Eiweißarten, deren größten Teil das Speichelenzym bildet. Sie

ändert sich auch parallel mit der Verdauungskraft und da Vortragender feststellte, daß die Konzentration des Rhodans auf die Verdauungsfähigkeit keine Wirkung ausübt, so müssen wir voraussetzen, daß wenn die Rhodansekretion groß ist, auch die Enzymbildung bedeutend ist und umgekehrt. Dieses Verhältnis beweist, daß die Bildung des Rhodans an die Funktion der Speicheldrüsen und zwar an die Bildung des Enzyms gebunden ist. Dafür spricht auch, daß das Rhodan sich augenscheinlich aus Eiweißsubstanzen bildet. Es kann somit unter den Speichelbestandteilen nur mit dem Enzym oder dem Muzin den gleichen Ursprung haben. Von diesen jedoch bildet sich das Muzin auch noch an andern Stellen des Körpers, ohne daß zugleich auch Rhodan entstände.

Das Speichelenzym und Rhodan entstehen wahrscheinlich aus eiweißartiger Grundsubstanz auf einmal, z. B. auf die Art, daß das Rhodan bei der Bildung des Enzyms als Nebenprodukt abfällt.

2. Rudolf Picker hielt einen Vortrag unter dem Titel: „*Zur Biologie und zur systematologischen Stellung des Gonococcus*“. Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildete eine Mitteilung Thalmanns, welcher gemäß es diesem gelungen war, ohne Zusatz von Serum auf mit Hilfe von Phenolphtalein als Indikator durch NaOH auf $^2/_3$ neutralisiertem Agar den Gonococcus aus dem Sekret zu züchten, sowie die Erfahrungen von Urbahn und Wildholz, denen es gelang, den Gonococcus, den sie auf serumhaltigem Nährboden gezüchtet, in einer großen Anzahl der Fälle früher oder später auf serumfreien Medien, auf Glyzerin- oder einfachem Agar zu züchten und weiterzuführen. Die Untersuchungen des Vortragenden bestätigen einesteils die bisherigen Erfahrungen, andernteils ergänzen sie dieselben.

Sitzung am 21. Februar 1905.

Michael v. Lenhossék hielt einen Vortrag unter dem Titel: „*Über die ersten Entwicklungsmomente des menschlichen Embryo und über die Implantation des Eies*“, in dem er seine neuesten Untersuchungen bekannt gibt, und zwar über diejenigen frühen Stadien der menschlichen und Säugetierembryonen, die auf die Furchung folgen.

Der Fortschritt auf diesem Gebiete ist der Ausarbeitung einiger sehr junger menschlicher Embryonen (die von Peters, Merttens, Spee usw.) und der den Menschen näherstehenden Säugetierembryonen (Affen, Halbaffen) zu verdanken, wobei hauptsächlich Hubrecht, Selenka und Kollmann sich außerordentliche Verdienste erwarben.

L. erörtert zunächst die Bildung der Keimblätter aus der Keimblase (Blastula), sodann behandelt er eingehend die Meinungsverschiedenheiten über die Bildung des Entoderma.

Das Entoderma des menschlichen Embryos entwickelt sich nicht durch Weiterwachsen des Trophoblastes an seiner inneren Seite wie

z. B. bei dem Kaninchen oder Hunde, sondern durch Spaltbildung beim Embryonalknoten, wie bei dem Stachelschwein oder dem Halbaffen Tarsius.

Hernach gab L. eine Übersicht über die bei der Entwicklung der Deckschichten vorkommenden Eigentümlichkeiten. Diese ist z. B. bei Kaninchen verkümmert, beim Schwein, beim Reh stärker entwickelt. Ihre stärkste Entwicklung erreicht sie bei den Säugetieren, bei welchen wir die Erscheinung der „Entypie" beobachten, wie z. B. beim Meerschweinchen und der Maus. Diese ist hauptsächlich deshalb interessant, weil auch beim Menschen die Entypie vorhanden ist.

Die Bildung des Entodermas bei den Säugetieren kann, mit der Gastrulation der übrigen Wirbeltiere verglichen, dem Entoderma des Amphioxus nicht gleichgestellt werden, da das Entoderma der Säugetiere nach Lenhossék dem Teloderma der Sauropsiden entspricht, welch letzteres wieder jener eigenartigen Entwicklungsart des Entoderma gleichzukommen scheint, die wir z. B. beim Salamander beobachten (Grönroos).

Sodann schreitet L. zur Demonstation des bis heute jüngsten präparierten menschlichen Embryo, des Petersschen, bei welchem die Embryonalanlage alles in allem bloß 0,19 mm im Durchmesser beträgt.

Der Dottersack im menschlichen Embryo ist von Anfang an sehr klein. Er bildet sich so, wie beim Stachelschwein, vergrößert sich aber nicht so sehr wie bei jenem, sondern bleibt klein.

Interessant ist, daß das Amnion des Menschen sich nicht durch Faltenbildung wie bei sämtlichen Sauropsiden entwickelt, sondern auf die Art wie z. B. bei der Fledermaus und den mit Entypie sich entwickelnden Säugetieren (z. B. Meerschweinchen), d. h. durch Spaltbildung am Embryonalknoten, wo das über die Spalte sich erhebende Plättchen zum Amnionepithel wird, während aus der Spalte das Cavum amnioticum oder richtiger Cavum myeloamnioticum wird. Die Ablösung des Amnion von der inneren Oberfläche des Chorion und die Bildung des sogenannten Bauchstiels, der für die Menschen und die menschenähnlichen Affen so charakteristisch ist, erklärte Vortragender an dem 2 mm langen Embryo von Spee.

Im zweiten Teile des Vortrages zählte Vortragender die neuen Anschauungen über die Implantation des Eies auf, durch vergleichende Daten diejenige Anschauung unterstützend, gemäß welcher die Anhaftung des menschlichen Eies nach dem sogenannten „interstitiellen" Modus geschieht, wie z. B. beim Meerschweinchen, bei welchem das Ei durch eine kleine Spalte des Epithels des Endometriums hindurch in die oberflächliche kompaktere Schicht des Bindegewebes der Mucosa gelangt, und sich dort einnistet.

Sitzung am 21. März 1905.

1. Paul v. Liebermann hielt auf Grund der Experimente Leó v. Liebermanns und Paul v. Liebermanns einen Vortrag: „*Über die Enzyme des Malzextrakts und den Mechanismus der Guajakreaktion*“. Die Guajakreaktion kommt auf die Art zustande, daß ein Bestandteil des Guajakharzes, die Guajakonsäure, zu einer blauen Verbindung oxydiert wird. Damit das rasch geschehe, ist aktives Oxygen nötig. Es gibt oxydierende Substanzen, die der Guajakonsäure gegenüber aktiv sind, z. B. das Ozon; diese färben unmittelbar die Guajaktinktur blau. Das Oxygen anderer oxydierender Mittel ist der Guajakonsäure gegenüber wirkungslos, aber dem Jodkali gegenüber aktiv, d. h. es scheidet das Jod aus demselben aus. Solche Substanzen oxydieren die Guajakonsäure nur mit Hilfe von Enzymen rasch. Aus den Untersuchungen Leo v. Liebermanns über diese Art der Reaktion ging hervor, daß die Oxygenquellen der Reaktion verschieden sein können, so z. B. kann es H_2O_2, altes Terpentinöl und sogar Guajaktinktur selbst sein, wenn sie alt ist. Die frische Tinktur enthält kein aktives Oxygen, aber wenn sie längere Zeit hindurch steht, nimmt sie das molekulare Oxygen der Luft auf, wobei sie eine wahrscheinlich superoxydartige Verbindung bildet. Das Oxygen verbindet sich dabei mit der Guajakonsäure (wird nicht blau), sondern zu einer andern, im Harze sich befindlichen Substanz oder Gruppe, welche wir nach Engler Autooxydator nennen können. Wenn wir zu dieser aktives Oxygen enthaltenden Tinktur bestimmte Enzymlösungen, z. B. Malzextrakt hinzufügen, so wandert das aktive Oxygen vom Autooxydator zur Guajakonsäure über und färbt sie blau. Auf welche Weise das Enzym dies bewirkt, wissen wir nicht genau und bestimmt: am wahrscheinlichsten ist es, daß es sich selbst zuerst mit dem Oxygen verbindet und es dann abgibt.

Neumann-Wender gab in seiner jüngst erschienenen Arbeit der Ansicht Ausdruck, daß das bei diesem Prozesse teilnehmende Enzym, das er Perioxydase nennt, nicht genügend sei zur Reaktion, sondern daß dazu auch Katalase nötig sei, also ein solches Enzym, das auch das H_2O_2 zerlegen kann. Wender wies nach, daß die verschiedenen Enzymwirkungen des Malzextraktes, wie auch die Zersetzung des H_2O_2 eine solche ist, durch verschiedene Enzyme ausgeübt zu werden, sodaß wir nicht berechtigt sind, anzunehmen, daß bei der Guajakreaktion bloß eins wirkt. Nach ihm muß also die Katalase die hier zusammenwirkenden Superoxyde auflösen: das Autooxydator-Superoxyd und die Enzym-Oxygenverbindung, welche er auch für Superoxyd hält.

Diese Frage ist theoretisch sehr interessant, da in neuerer Zeit in der Literatur immer neuere Daten über solche vermittelnde Enzyme

auftauchen, die die Wirkung eines anderen Enzyms ermöglichen. Wenn Wenders Hypothese richtig wäre, so wäre die Guajakreaktion nur ein sehr lehrreicher Fall für solche Prozesse.

Aus den Experimenten zur Entscheidung dieser Frage ging hervor, daß *Katalase zur Guajakreaktion nicht nötig ist.* Es gelang nämlich solche Lösungen herzustellen, die die Guajakreaktion gaben, obzwar diese das H_2O_2 nicht zerlegen konnten, also keine Katalase enthielten.

Ein ähnliches Resultat ergaben auch andere Versuche, die mit andern, die Guajakreaktion gebenden Flüssigkeiten gemacht wurden.

Das die Guajakreaktion des Blutes gebende Enzym ist nach den Experimenten Leo v. Liebmanns das Methaemoglobin oder eine ihm ähnliche Substanz, die auf Einwirkung des bei der Reaktion gebrauchten Terpentinöls aus dem Blutfarbstoffe sich bildet. Methaemoglobin können wir auch auf andere Weise herstellen, z. B. durch verdünnte Essigsäure.

Da die Wirkung irgend einer Lösung auf H_2O_2 sich aus den qualitativen Reagenzglasversuchen schwer beurteilen läßt, wurden alle Versuche auch quantitativ angestellt, indem das erzeugte Oxygen auf manometrischem Wege bestimmt wurde, und zwar mit Hilfe eines Apparates, den Leo v. Liebermann zu solchen Messungen konstruiert hat.

2. Dr. Ladislaus v. Rhorer hielt einen Vortrag: „*Über die osmotische Arbeit der Nieren*". Die Nieren verfertigen aus dem immer ungefähr $^1/_3$ normalen osmotisch-konzentrierten Blut unter normalen Verhältnissen einen viel (ungefähr dreimal) konzentrierteren, nur ausnahmsweise dünneren Urin als das Blut; in beiden Fällen bewirken sie Konzentrationsunterschiede, also vollbringen sie Arbeit gegen den osmotischen Druck, der die Ausgleichung der Konzentrationsunterschiede erstrebt. Diese Arbeit ist es, die wir unter der osmotischen Arbeit der Nieren verstehen. Zur Bestimmung derselben muß man die partielle Konzentration der einzelnen Bestandteile in Betracht ziehen, wodurch der Wert der genannten Arbeit auf mehr als das Doppelte des bisher berechneten, auf täglich ungefähr 450 mkg, das heißt auf einen etwas größeren Wert als 1 kg Kalorie steigt.

Sitzung am 4. April 1905.

Koloman v. Tellyesniczky hielt einen von Demonstrationen begleiteten Vortrag unter dem Titel: „*Die Struktur und Funktion der Milz*", in welchem er auf Grund seiner Untersuchungen die Struktur und Bedeutung der Milz besonders mit bezug auf die strittigen Punkte erklärt. Die Teilung der Milz in solche mit breitem venösem Netz (Mensch, Nagetier) und solche ohne venöses Netz (Schwein,

Rind, Schaf, Pferd), die von Billroth stammt, ist beizubehalten, obzwar sie das Wesen der Struktur der Milz nicht berührt. Die Kapsel und das Gebälke der menschlichen Milz besteht aus kompaktem, faserigem Bindegewebe, in dem sehr feine elastische Elemente ein dichtes Netz bilden; Vortragender fand in ihnen keine Muskelelemente, obzwar er auf solche sehr achtete. Die Kapsel der Milz der Haussäugetiere, sowie die Balken, enthalten sehr wenig oder gar kein Bindegewebe; bei diesen bilden den Grundstoff der Balken glatte Muskelfasern, zwischen denen ein Netz dickerer elastischer Fasern eingebettet ist. Der alte Streit betreffs der Verbindung der Arterien und Venen, der sich darum drehte, ob das Blut aus den Arterien, die in der Milz kein Kapillarnetz bilden, durch Vermittelung der Pulpa (offener Kreislauf) in die Venen gelangt oder ohne dieselben (geschlossener Kreislauf), kann als beigelegt betrachtet werden und zwar durch folgende Gründe: 1. Die Pulpa finden wir auch normal mit roten Blutzellen gefüllt. 2. Ins Blut gebrachte fremde Körnchen z. B. Tuschkörnchen oder Blutzellen anderer Tiere (z. B. Vogelblut bei Säugetieren) erscheinen sofort in der Pulpa. 3. In der Milz der mit Anthrax behafteten Tiere findet man die Pulpa mit Milzbrandbazillen, obzwar sich dieselben nur im Blutstrome aufhalten, sehr dicht injiziert. 4. Eine Ausspritzung mit Kochsalzlösung wäscht die Pulpa durch die ordentliche Bahn des Blutstroms vollständig aus. 5. Gewöhnliche Gelatineinjektionen bewirken ohne Ausnahme auch die Injektion der Milzpulpa. Der Blutkreislauf der Pulpa an und für sich würde auch erklären, wie die Leukozyten sowohl aus der Pulpa als auch aus den Milzknötchen, welche gegen die Pulpa keinerlei Grenzen aufweisen, in den Blutstrom gelangen.

In neuerer Zeit jedoch (Helly und Weidenreich) wurde auch die überraschende Tatsache konstatiert, daß Leukozyten in großem Maße auch durch die Wand der Blutgefäße hindurch wandern; diese Diapedese demonstriert Vortragender auch an einer andern Milz, die 2 Stunden nach dem Tode eines erhängten Menschen fixiert wurde. Die weißen Blutzellen der Pulpa und der Lymphknötchen können also auf zweierlei Weise durch den Blutstrom und vermittels der Diapedese in das venöse System der Milz gelangen. Auf diese Weise wird die so riesige Vermehrung der Leukozyten in den Milzvenen erklärlich, sodaß wir schon mit freiem Auge angefärbten Präparaten den Unterschied zwischen dem Inhalte der Arterien und Venen sehen können; die Milz des Embryos scheidet kernhaltige rote Blutzellen aus, die Milz des Erwachsenen sowohl Lymphozyten als auch Leukozyten mit polymorphen Kernen, was der Vortragende durch Vergleichung des Inhaltes der Arterien und Venen der Milz demonstrierte.

Sitzung am 16. Mai 1905.

1. Alexander v. Korányi trägt seine mit Julius Bence angestellten Untersuchungen unter dem Titel: *„Physikalisch-chemische Blutuntersuchungen“* vor. Die Verteilung der gelösten Grundbestandteile des Blutes zwischen dem Serum und den Zellen des Blutes und die Modifizierung dieser Verteilung durch die Wirkung der Änderung des CO_2-Gehaltes kann nur so richtig beurteilt werden, wenn wir auch die Volumsveränderung der Zellen, bewirkt durch das CO_2, in Betracht ziehen. Nach Veränderung des CO_2-Gehaltes ändert sich die elektrische Leitungsfähigkeit. Dagegen wächst der Lichtbrechungsindex. Daraus folgt, daß im Serum sich die Konzentration der großen organischen Moleküle steigert, wobei die Leitungsfähigkeit nur in dem Falle fast gleich bleiben kann, wenn auch die Konzentration der Elektrolyten sich steigert. Es kann auf Grund der Leitungsfähigkeit und des Brechungsindex die „korrigierte“ Leitungsfähigkeit berechnet werden, die die Vergrößerung der Ionkonzentration zeigt; diese jedoch ist geringer als daß sie der Volumsverminderung des Serums entspräche. Durch Wirkung des CO_2 verschwinden Elektrolyte aus dem Serum und gelangen in die Blutzellen. Demgegenüber ist die Vergrößerung des Brechungsindex viel größer als daß sie der Volumsänderung des Serums entspräche, woraus folgt, daß aus den Blutzellen große Moleküle in das Serum übertreten. Die Veränderung begleitet die Steigerung der Viskosität des Blutes, wofür ein Grund in der Volumvergrößerung der Zellen liegt. Die Größe der bestimmten CO_2-Wirkung hängt von der Quantität des CO_2 und der Zahl der Blutzellen ab; es sind dies Wirkungen des Hydrogen-Ions, die rückentwickelt werden können, wenn wir die vom CO_2-Gehalte des Blutes abhängenden H-Ione mit HO-Ionen einer Lauge neutralisieren. Zur Beobachtung der Neutralisation des CO_2 ist die Änderung der Refraktion des Serums am geeignetesten. Die bis zum Minimum des Brechungsindex verbrauchte Lauge ist das Maß desjenigen CO_2-Gehaltes des Blutes, der zur Abgabe von H-Ionen fähig ist. Ein Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß die Endreaktion nicht sehr genau ist. Deshalb ist es zweckmäßiger, als annäherndes Zeichen für die Änderung des CO_2-Gehaltes das Maß der Verkleinerung des Brechungsindex durch Laugenwirkung anzusehen, die bei konstanter Blutzellenzahl zugleich mit dem CO_2-Gehalte zunimmt. Auf dieser Grundlage wäre die exakte Bestimmung des CO_2-Gehaltes im Blute kaum möglich, doch die Richtung seiner Schwankungen ist bei wenig Blut erkennbar, so daß von nun an die Änderungen des CO_2-Gehaltes des Blutes auch Objekt klinischer Untersuchungen sein können.

2. Julius Donath macht in seinem Vorträge unter dem Titel: „*Eine neue Cholinreaktion*“ uns mit dem Nachweis des Cholin in der cerebrospinalen Flüssigkeit durch das Polarisationsmikroskop bekannt. Sein Verfahren beruht auf der doppelten Brechung des Cholinplatinchlorides. Zu 20—30 cm^3 der zu untersuchenden Cerebrospinalflüssigkeit schütten wir, um das Ca, Mg und Fe zu entfernen, ein wenig K_2CO_3-Lösung, der eventuelle Niederschlag wird abfiltriert, das Filtrat wird abgedampft. Der Trockenrückstand wird in Alkohol gelöst abgeseiht und nachdem wir das Filtrat mit HCl schwach angesäuert, lassen wir es wieder verdampfen, bis es trocken ist. Dieses trockene Salz lösen wir in absolutem Alkohol, filtrieren es und behandeln das Filtrat mit einer abgemessenen Quantität (ungefähr 0,3—0,4 cm^3) Lösung von absolutem Alkohol und 5 % Platinchlorid. Den auf dem Filter angesammelten Platinchloridniederschlag waschen wir mit absolutem Alkohol aus und lösen ihn dann in ein wenig (1—3 cm^3) warmem Wasser auf. Zu dieser Lösung fügen wir dann 0,3—0,4 cm^3 1,5 % KCl-Lösung hinzu. Die 1,5 % KCl-Lösung ist bei gleichem Volumen äquivalent mit der 5 % Platinchloridlösung bei der Bildung des Kaliumplatinchlorids. Die Kaliumchloridmenge ist mehr als hinreichend, um das überflüssige Platinchlorid zu binden und zwar in Gestalt des nach dem regelmäßigen System kristallisierenden Kaliumplatinchlorids, welches aber ebensowenig zu Irrtümern Anlaß gibt wie das ebenfalls im Überfluß hinzugefügte und ebenfalls nach dem regelmäßigen System kristallisierende KCl. Nach diesem Verfahren gelangt keiner der bisher bekannten Bestandteile des Liquor cerebrospinalis (Eiweißkörper, Bilirubin, Fett, Traubenzucker, Ureum, Choleastarin, Milchsäure, Fe, Ca, Alkalien), die zum Teil doppelt brechen, in den Platinchloridniederschlag. Demnach besteht letzterer nur aus Kaliumammonium- und Cholinplatinchlorid, zu deren wässeriger Lösung nur noch überflüssiges KCl hinzukommt. Das übrigens auch doppelt brechende Natriumplatinchlorid, welches sechsmal mehr Kristallwasser enthält, gelangt auch nicht in den Platinchloridniederschlag, da — wie Vortragender fand — das Platinchlorid das in absolutem Alkohol gelöste NaCl überhaupt nicht niederschlägt. Die rote Lösung enthält somit außer dem Cholinplatinchlorid nur noch einfach brechende Substanzen. Einzelne Tropfen dieser wässerigen Lösung stellen wir auf einen Objektträger in den Exsikkator und lassen sie nun dort 24 Stunden lang eintrocknen. An den gelben Kristallen des Cholinplatinchlorids (Plättchen, Leisten, gerade und gebogene Nadeln, mitunter in Bauschgarben und rosettenartiger Anordnung, Prismen, Fasern, welch letztere oft gezähnt sind) können wir zwischen gekreuzten Nikols die Erscheinung der farbigen Polarisation sehen. Das winzigste mikroskopische Bruchteilchen dieser

doppelt brechenden Kristalle kann durch seine Helle oder durch seine Farbenpracht auf dunklem Boden sehr scharf unterschieden werden; die übrigen einfach brechenden Alkalichloride bleiben dunkel.

Vortragender konnte mit dieser seiner Methode, wie auch früher, das Vorkommen des Cholins im Liquor cerebrospinalis bei solchen Nervenkrankheiten konstatieren, die mit dem schnelleren Zerfalle des Nervengewebes zusammenhängen (Paralysis progressiva, Tabes dorsalis, Myclitis, Meningitis tuberculosa usw. oder bei Epilepsie nach häufigeren Anfällen.)

Vortragender untersuchte auch eine andere Cholinreaktion und zwar den durch Jod-Jodkali oder noch eher mit Jod-Jodbaryum zustande kommenden Niederschlag. Jedoch kann man nur bei verhältnismäßig konzentrierteren Cholinlösungen unter dem Mikroskope Kristalle und feine Tropfen sehen; die Kristalle fließen bald auseinander; der Grund hierfür ist, daß der Jod-Cholinniederschlag sowohl im Reagensüberschusse als auch im Wasser sich leicht löst, ja sogar der in der Eprouvette hervorgebrachte Niederschlag wird auch leicht gelöst. Bei dünneren Cholinlösungen oder noch eher bei den cerebrospinalen Flüssigkeiten bekommt man meistens nur Tropfen, weshalb auch diese Reaktion, als weniger charakteristisch, zum Nachweis des Cholins nicht geeignet ist. Außerdem ist sie auch weniger empfindlich als die Polarisationsmethode.

E) Konferenz der vereinigten Sektionen.

Sitzung am 15. April 1902.

Hugo Preisz hielt einen Vortrag über „*Die Ursachen der beschränkten Leistung des Ultramikroskopes und unserer optischen Instrumente.*"

F) Populäre Abendvorlesungen.

Vorträge am 9. und 16. Dezember 1904.

Alexander Gorka hielt zwei Vorträge über „*Symbiosis*".

G) Populäre Kurse.

1. Ludwig v. Ilosvay: *Elemente der organischen Chemie.* 7 Vorträge vom 10. Februar bis 1. April 1905.
2. Michael Pekár: *Das Blut und sein Kreislauf.* 8 Vorträge vom 10. Februar bis 31. März 1905.

BERICHTE ÜBER DIE TÄTIGKEIT, DEN VERMÖGENSSTAND U. A. DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KGL. UNG. NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT.

I. Ungarische Akademie der Wissenschaften.

1.

Die LXV. feierliche Jahresversammlung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften wurde am 14. Mai 1905 vom Vizepräsidenten, Julius Kautz, mit einer Ansprache *über den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft und Wissenschaftlichkeit in unserm Vaterlande* eröffnet.

2.

Hierauf gedachte der Generalsekretär Gustav Heinrich in seinem

Jahresberichte

besonders der Bestrebungen der Akademie zur Verewigung des Andenkens ihres Gründers, des Grafen Stefan Széchenyi.

„Seit dreißig Jahren" — so sprach er — „beschäftigt sich die Akademie sowohl mit den in Druck erschienenen als auch mit den in Handschriften hinterlassenen Werken dieses Mannes, der zu den bedeutendsten Gestalten des XIX. Jahrhunderts zählt und den wir heute noch — vielleicht in tieferem Sinne denn je — den größten Ungarn nennen. Bereits im Jahre 1875 verschaffte sich die Akademie von den Erben Stefan Széchenyis das Verlagsrecht des gesamten literarischen Nachlasses und veröffentlichte dann in den Jahren 1884 bis 1894 vorerst von seinen noch nicht herausgegebenen Handschriften und seinen zerstreut erschienenen Artikeln neun Bände. Aber auch eine neue Ausgabe der noch bei seinen Lebzeiten erschienenen Werke des großen Staatsmannes war schon langeher ein dringendes Bedürfnis, da diese Werke zumeist auf dem Büchermarkte nur schwer zu verschaffen und einige von ihnen ganz unzugänglich waren. Diese

Werke werden, wie die Széchenyi-Kommission meldet, fünf Bände von je 40 Bogen ausfüllen, in denen diese bei weitem nicht hinlänglich bekannten und noch weniger erschöpften Schätze der politischen Weisheit und Vaterlandsliebe wieder in die Hände der Nation gelegt werden. Auf Antrag jener Kommission faßte die Akademie in der Gesamtsitzung im Januar den Entschluß, daß sie in den Jahren 1904 und 1905 aus Széchenyis *sämtlichen Werken* zwei Bände veröffentlicht, welche die folgenden Werke enthalten sollen: *Hitel* (Kredit), *Világ* (Welt), Stadium, *Kelet népe* (Das Volk des Ostens) *és Politikai programmtöredék* (Politisches Programmfragment). Auch beschloß sie, diese Ausgabe mit sachlichen und sprachlichen Einleitungen zu versehen.

Der I. Band erschien im Jahre 1904. Er enthält die Werke *Hitel* und *Világ* mit zwei Einleitungen; in der ersten charakterisiert Paul v. Gyulai den Grafen Stefan Széchenyi als Schriftsteller, in der zweiten schildert Julius Kautz die Bedeutung dieser ersten zwei hervorragenden Werke des großen Mannes. Der zweite Band befindet sich unter der Presse und wird bis Oktober dieses Jahres erscheinen.

Aber auch in einer andern Richtung ist die Akademie bestrebt die Erinnerung an ihren Begründer in den künftigen Generationen rege zu erhalten: sie gründet ein Széchenyi-Museum, das die ganze auf den großen Patrioten bezügliche Literatur und andere Andenken enthält. Als geeignetster Moment zur Eröffnung dieses Museums bietet sich uns die 80. Jahreswende des Begründungstages unserer Akademie dar, die wir im November dieses Jahres feiern werden. Bis dahin wird dieses reichhaltige und interessante Museum, das in mehreren schönen Sälen der Akademie untergebracht ist, vollkommen geordnet sein. Das Museum besitzt 62 Werke von Stefan Széchenyi in 112 Bänden, nahezu 600 Werke über Széchenyi in 680 Bänden, 138 Zeitungen und Zeitschriften, 48 Plakate und Musikalien in 150 Stücken, 90 Széchenyi-Bilder, 13 Széchenyi-Statuen, 42 Bilder und 6 Statuen aus der Umgebung des Grafen, 150 Andenken und mehrere tausend Handschriften von und über Széchenyi."

Im Anschlusse an diese Anmeldungen dankte der Generalsekretär zugleich dem Grafen Béla Széchenyi und dem ehemaligen Generalsekretär Koloman v. Szily für die Begeisterung und Opferwilligkeit, mit welcher sie das Zustandekommen dieser schönen Sammlung ermöglicht haben.

Nach eingehender Würdigung der vieljährigen segensreichen Tätigkeit seines Vorgängers Koloman v. Szily gedachte Redner der Verluste, welche die Akademie durch das Ableben des Direktionsrates Georg Császka, des Ehrenmitgliedes Grafen Géza Kuun, der ordentlichen Mitglieder Wilhelm Schulek und Alexander Lipthay, der korrespondierenden Mitglieder Samuel Batizfalvy, Ákos Beothy und

und Alexander Schmidt, sowie des auswärtigen Mitgliedes Kanut d' Olivecrona im vergangenen Jahre erlitten hat.

Die einzelnen Mitglieder sterben, nach den ewigen Gesetzen der Natur — sagte er in den Schlußworten seines Berichtes —, doch die Akademie stirbt nie. Die Plätze unserer abberufenen Genossen werden durch neue Kräfte ersetzt, die mit frischer Begeisterung und edler Ambition in unsern Kreis treten, um an dem Aufbaue des Pantheons der ungarischen Wissenschaft mitzuwirken. Wir begrüßen sie herzlich und wünschen ihrem Eifer vollen Erfolg.

3.

Die Vermögensverhältnisse der Akademie sind aus folgenden Daten ersichtlich:

	Kronen	Heller
Die Akademie besaß am 31. Dezember 1904 ein reines Gesamtvermögen von	5 708 594	13
Davon entfallen auf das Gebäude, die Bibliothek, den Büchervorrat usw.	2 000 000	—
Das Budget der Akademie belief sich im Jahre 1904 auf	433 130	65
Die Ausgaben der III. Klasse beliefen sich im Jahre 1904 auf	52 601	90

4.

Die Anzahl der Mitglieder der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am Ende des Jahres 1904 ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

	I. (sprachwissenschaftl. u. ästhetische) Klasse	II. (philosophische und historische) Klasse	III. (mathematische u. naturwissenschaftl.) Klasse	Zusammen
Ehrenmitglieder	5	9	8	22
Ordentl. Mitgl.	12	23	22	57
Korresp. Mitgl.	33	51	53	137
Auswärt. Mitgl.	33	18	28	79
Zusammen	83	101	111	295

Die Vermögensangelegenheit verwaltete der Direktionsrat der Akademie, welcher aus dem Präsidenten und Vizepräsidenten, dem Generalsekretär und 23 Mitgliedern bestand.

Nach den Statuten beträgt der Status der Akademie: Ehrenmitglieder 24, ordentliche Mitglieder 60, korrespondierende Mitglieder 156.

Im Mai 1905 wurden in der III. Klasse die folgenden neuen Mitglieder gewählt:

Zum ordentlichen Mitglied:

Ludwig v. Ilosvay, Chemiker, bisher k. M.

Zu korrespondierenden Mitgliedern:

Ludwig v. Bodola, Geodät.

Emerich v. Lörenthey, Palaeontolog.

Zum auswärtigen Mitglied:

Wilhelm Pfeffer in Leipzig, Botaniker.

5.

Bibliothek. Die Anzahl der geordneten Fächer beträgt 54. Diese enthalten 71 604 Werke. Darunter:

Anthropologie	529
Mathematik und Astronomie	1237
Naturwissenschaft	247
Physik	1021
Chemie	465
Naturgeschichte	137
Zoologie	735
Botanik	459
Mineralogie und Geologie	577
Medizinische Wissenschaften	2579
Ausgaben von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften	629
Ausgaben der Ungar. Akademie d. W.	386
Ausländische Zeitschriften	204
Inländische Zeitschriften	399
Bolyaiana	39.

Der Fachkatalog besteht aus 113 Bänden und 48 Zettelkasten. Angekauft wurden 503 Werke. Als Pflichtexemplare wurden erhalten von 326 Druckereien 8418 Werke. Private und Behörden schenkten 153 Werke.

Im Lesesaal der Bibliothek benutzten 8866 Personen 12 206 Werke. Ausgeliehen waren 708 Werke.

6.

Die III. Klasse hat folgende Arbeiten mit Preisen gekrönt:

1. Stefan Bugárszky: *Der Einfluß des Mediums auf die Reaktionsgeschwindigkeit und das chemische Gleichgewicht.* (Rózsay-Preis.)
2. Alexius Sigmond: *Neue Untersuchungen über den Phosphorbedarf des Kulturbodens und dessen Bestimmung.* (Rózsay-Preis.)

II. Kgl. Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft.

1.

Die Gesellschaft hielt ihre Generalversammlung am 28. Januar 1905 ab. Nach einer schwungvollen Eröffnungsrede des Präsidenten Prof. Vinzenz Wartha folgte der Jahresbericht des Sekretärs Prof. Josef Paszlavszky, aus dem wir die folgenden Daten entnehmen:

Im verflossenen Jahre sind in die Gesellschaft 961 neue Mitglieder eingetreten. Die Gesellschaft hat jetzt 8822 Mitglieder.

Die Gesellschaft gibt die folgenden ungarischen Zeitschriften heraus:

Természettudományi Közlöny (Naturwissenschaftliche Mitteilungen) und hierzu *Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz* (Ergänzungsheft der Naturwissenschaftlichen Mitteilungen);
Állattani Közlemények (Zoologische Mitteilungen);
Növénytani Közlemények (Botanische Mitteilungen);
Magyar chemiai folyóirat (Ungarische Chemische Zeitschrift).

Außerdem hat die Gesellschaft eine Verlagsunternehmung für Pränumeranten, die je einen Zyklus von drei Jahren abonnieren. Im XI. Zyklus (1902—1904) erschienen in dieser Unternehmung die folgenden Werke:

Hoffmann-Wagner: *Magyarország virágos növényei* (Ungarns Phanerogamen, mit ungarischem Texte und ergänzenden Tafeln versehene Ausgabe des Hoffmannschen Pflanzenatlasses);
G. Almássy: *Vándorútam Ázsia szivébe* (Meine Reise nach Mittelasien);
K. Lamperth: *Az édesvizek élete* (Das Leben der Süßwässer), übersetzt von M. Entz;
O. Hermann: *A magyar nép arcza és jelleme* (Gesicht und Charakter des ungarischen Volkes);
G. H. Darwin: *A tengerjárás és rokon tunemények* (Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen), übersetzt von R. v. Kövesligethy.

2.

Aus dem Berichte des Kassierers entnehmen wir die folgenden Daten:

	Kronen	Heller
Die Gesellschaft besaß am 31. Dezember 1904 ein reines Gesamtvermögen von	425 516	13
Davon entfallen auf das Gebäude	238 000	
auf die Bibliothek	100 000	
auf den Büchervorrat . . .	40 000	
Das Budget der Gesellschaft belief sich im Jahre 1904 auf	154 718	19

3.

Aus dem Berichte des Bibliothekars erfahren wir, daß die Bibliothek der Gesellschaft um 699 Bände und 1 Atlas gewachsen ist, so daß sie mit Ende 1904 insgesamt 26 309 Bände umfaßte. Den Mitgliedern standen im Lesezimmer 133 Zeitschriften zur Verfügung. Auf neue Bücher und Einbände wurden 6555 Kronen verwendet. Der Bibliothek wurden im Jahre 1904 von 3513 Mitgliedern 4277 Bände entliehen.

BERICHT ÜBER DEN BOLYAI-PREIS.

Erstattet
von GUSTAV RADOS
an die ungarische Akademie der Wissenschaften.

Hochansehnliche Akademie!

Anläßlich der hundertsten Jahreswende der Geburt von JOHANN BOLYAIS hatte die hochansehnliche Akademie — um auch ihrerseits zur Feier dieses denkwürdigen Tages beizutragen — beschlossen, zum Andenken dieses Forschers von unvergänglichem Ruhme, sowie seines Vaters und Lehrers WOLFGANG BOLYAIS eine das Symbol der Akademie und das Bild von Budapest zeigende Medaille, sowie ferner einen internationalen Preis von 10000 Kronen zu stiften, der für immerwährende Zeiten die Benennung „BOLYAI-Preis der ungarischen Akademie der Wissenschaften" zu führen hat. Im Sinne des Stiftungs-Statutes hat derselbe zum ersten Male im Jahre 1905 zur Verteilung zu gelangen und ist nachher jedes fünfte Jahr dem Autor der hervorragendsten mathematischen Untersuchungen des verflossenen Lustrums zuzuerkennen, ohne Rücksicht auf die Sprache und die Art der Veröffentlichung dieser Untersuchungen. Es hat jedoch auch die Gesamtleistung des mit dem Preis zu krönenden Forschers in Betracht zu kommen. Für die Zuerkennung dieses Preises hat die mathematische und naturwissenschaftliche Klasse der Akademie in der März-Sitzung der Fälligkeitsjahre eine aus zwei internen und zwei auswärtigen Mitgliedern bestehende Kommission einzusetzen, die im Oktober dieses Jahres in Budapest zusammentritt und aus ihrer Mitte ihren Präsidenten und Referenten wählt. Der Präsident ist stimmberechtigt und entscheidet im Falle von Stimmengleichheit durch sein Votum.

Die Akademie hat für das Jahr 1905 eine Kommission eingesetzt, die bestanden hat aus den internen Mitgliedern: Herrn JULIUS KÖNIG, Sekretär der mathematischen und naturwissenschaftlichen Klasse, und GUSTAV RADOS, Mitglied derselben Klasse, und aus den zwei auswärtigen Mitgliedern: Herrn GASTON DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Academie des Sciences de l'Institut de France, und Herrn FELIX

KLEIN, Mitglied der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Die Kommission war am 11. und 12. Oktober zu ihren mündlichen Verhandlungen in Budapest vereint und wählte Herrn GASTON DARBOUX zum Präsidenten, Herrn FELIX KLEIN zum Referenten.

Der Schluß des von der Kommission aufgenommenen Protokolls lautet:

„Die Kommission konstatierte zuvörderst, daß die neuen Gesichtspunkte, von denen die moderne mathematische Forschung beherrscht wird, eine sehr ansehnliche Zahl von mathematischen Arbeiten zutage gefördert hat, deren hohen Wert die Kommission mit Freude anerkennt; allein gerade dieser Umstand hat die Aufgabe der Kommission auch zu einer äußerst schwierigen gestaltet.

Die Kommission war überzeugt, den Intentionen der Akademie am besten nachzukommen, indem sie sich entschloß, nur diejenigen Arbeiten in Verhandlung zu ziehen, die auf die *allgemeine* Entwicklung der Mathematik von bedeutendster Einwirkung waren. In diesem Sinne konnte die Kommission sich darauf beschränken, die Werke zweier Forscher in Erwägung zu ziehen, deren Verdienste allseitig anerkannt sind. Es sind dies die Herren DAVID HILBERT und HENRI POINCARÉ.

Die Kommission hat nun den einhelligen Beschluß gefaßt, den BOLYAI-Preis Herrn

HENRI POINCARÉ

zuzuerkennen, indem sie im Sinne des Statutes die Gesamtleistung des Herrn POINCARÉ in Betracht zog, dessen Untersuchungen bereits im Jahre 1879 einsetzen und sozusagen einen Kreislauf um das Gesamtgebiet der Mathematik vollendet haben, wobei sie der mathematischen Forschung überall neue Gesichtspunkte eröffneten. Die Kommission hat jedoch zu gleicher Zeit beschlossen, um Herrn HILBERT ein ganz besonderes Zeichen ihrer großen Wertschätzung darzubringen, ihren Referenten — entgegen dem herkömmlichen Brauch — damit zu beauftragen, in seinem Berichte der Arbeiten des Herrn DAVID HILBERT in derselben ausführlichen Weise zu gedenken, wie derjenigen des Herrn POINCARÉ. Denn sie würdigt die universelle Bedeutung derselben im vollen Maße und ist überzeugt, daß sie je länger, je mehr zu einer Rolle von größter Bedeutung berufen sind."

G. DARBOUX, Präsident.
F. KLEIN, Referent.
JULIUS KÖNIG.
GUSTAV RADOS.

* * *

Im Sinne dieser Beschlüsse hätte Herr Felix Klein als gewählter Referent der Kommission die Werke der Herren Henri Poincaré und David Hilbert in gleicher Weise hinsichtlich ihrer Einwirkung auf die Entwicklung neuer mathematischer Ideen und Methoden des eingehenden besprechen und würdigen sollen. Leider war Herr Felix Klein infolge seines Schonung heischenden Gesundheitszustandes gezwungen, seine Referentenstelle niederzulegen, und so mußte denn die Kommission — und wie ich hinzufügen darf — das gesamte mathematische Publikum mit lebhaftem Bedauern auf Herrn Kleins Bericht verzichten. Herr Klein hätte mit demselben gewiß in glänzender Weise einen hochbedeutenden Beitrag zur Geschichte der modernen mathematischen Forschung geliefert. Um für den Ausfall des erwarteten Berichtes einigermaßen Ersatz zu schaffen, hat die Bolyai-Kommission mich der unverdienten Ehre teilhaftig gemacht, an Stelle des Herrn Klein zu treten. Angesichts der kurzen Zeit, die mir zum Studium des reichen Materials zur Verfügung gestanden hat, nicht minder aber auch wegen der großen Schwierigkeit der mir zugefallenen Aufgabe, fürchte ich derselben nur in höchst unvollkommener Weise zu entsprechen. Um den gestellten Anforderungen auch nur einigermaßen gerecht zu werden, mußte ich mir von Haus aus die Beschränkung auferlegen, aus der großen Zahl der in Betracht kommenden Leistungen nur diejenigen herauszugreifen, welche gelegentlich der mündlichen Verhandlungen der Kommission als besonders maßgebend hervorgehoben wurden.

Henri Poincaré ist unstreitbar im Augenblicke der wirksamste Forscher auf dem Gebiete der Mathematik und mathematischen Physik. Seine scharf ausgeprägte Individualität läßt ihn als intuitiven Gelehrten erkennen, der sich die Anregung zu seinen weitausgreifenden Untersuchungen aus dem unerschöpflichen Born geometrischer und physikalischer Anschauungen holt, diese jedoch mit bewundernswerter logischer Schärfe auch ins einzelne zu verarbeiten vermag. Neben glänzender Erfindungsgabe kennzeichnet ihn die Fähigkeit zur kühnen und erfolgreichen Verallgemeinerung mathematischer Beziehungen, die es ihm oft ermöglichte, die Grenzen der Erkenntnis auf den verschiedensten Gebieten der reinen und angewandten Mathematik weit hinaus zu schieben.

Hiervon zeugen gleich seine ersten Arbeiten über die automorphen Funktionen, mit denen er die Reihe jener glänzenden Publikationen eröffnete, die zu den größten mathematischen Leistungen aller Zeiten gezählt werden müssen. In dem Bestreben, für die Lösungen von Differentialgleichungen eindeutige und überall konvergente Darstellungen zu ermitteln, wandte er sich zunächst der einfachsten bis dahin genauer untersuchten Klasse von totalen Differentialgleichungen zu, den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit rationalen oder auch

algebraischen Koeffizienten. Er gelangte hierbei zu neuen Transzendenten, die als weittragende Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen, oder auch der elliptischen Modulfunktionen aufgefaßt werden können, und hinsichtlich der Lösung von linearen Differentialgleichungen dasselbe leisten, was die elliptischen und ABELschen Thetafunktionen für die Integrale algebraischer Differentiale geleistet hatten. Diese neuen transzendenten Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich gegenüber den Transformationen gewisser diskontinuierlicher Gruppen von linear gebrochenen Substitutionen invariant verhalten. Sind in diesen Substitutionen $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ von der Determinante $ad - bc = 1$ alle Koeffizienten reelle Zahlen, so lassen diese die Achse der reellen Zahlen fest. Werden derartige Substitutionen mit einer solchen komponiert, deren Koeffizienten beliebige komplexe Zahlen sind, so lassen die komponierten Substitutionen einen Kreis unverändert, den POINCARÉ als Fundamentalkreis bezeichnet. Die hierdurch gekennzeichneten Gruppen sind es, die POINCARÉ FUCHSSche Gruppen nennt, während er die allgemeinsten diskontinuierlichen Gruppen von linearen Substitutionen als KLEINSche Gruppen benannt hat. Vermittels der Auffassungsweise der nichteuklidischen Maßbestimmung gelang es nun POINCARÉ die Beschreibung und Bestimmung der in Frage stehenden Gruppen anschauungsmäßig zu gestalten. Jede dieser Gruppen gibt Anlaß zu einer regulären Gebietseinteilung der Ebene oder des Raumes, und es kann dem Problem, alle FUCHSSchen oder KLEINschen Gruppen aufzustellen, die Wendung gegeben werden, daß alle regulären Gebietseinteilungen der nichteuklidischen Ebene beziehungsweise des nichteuklidischen Raumes zu bestimmen sind. Durch Einführung der sogenannten Zyklen konnte nun POINCARÉ die möglichen Fundamentalbereiche der FUCHSSchen Gruppen in sieben Familien einordnen und schließlich die den jeweiligen Gebietseinteilungen zugehörigen Gruppen auch wirklich aufstellen. Es handelte sich nun ferner um die Lösung des wichtigen Problems, diejenigen eindeutigen Funktionen zu bestimmen, die sich gegenüber den Substitutionen einer FUCHSSchen Gruppe invariant verhalten. Es sind dies die von POINCARÉ sogenannten FUCHSSchen Funktionen. Hierbei läßt sich POINCARÉ wieder durch die Analogie mit den elliptischen Funktion leiten. Bekanntlich sind die elliptischen Thetafunktionen selbst nicht periodisch, sondern verändern sich bei Vermehrung des Argumentes mit einer Periode durch das Hinzutreten eines Exponentialfaktors. POINCARÉ bildet nun Reihen, an denen die Einwirkung der Transformationen einer FUCHSSchen Gruppe schon äußerlich in Evidenz tritt und deren Verhalten dem der elliptischen Thetafunktionen ähnlich ist. Dieselben sind von der Form

$$\Theta(z, H(z)) = \Sigma H\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)(c_i z + d_i)^{-2m}, \qquad (m > 1)$$

wo die Summe über alle Transformationen der Gruppe zu erstrecken ist und H das Zeichen einer beliebigen rationalen Funktion bedeutet. Die durch diese Reihen definierten eindeutigen analytischen Funktionen sind es, die POINCARÉ als FUCHSsche Thetafunktionen bezeichnet. Dieselben genügen der Funktionalgleichung

$$\Theta\left(\frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right) = \Theta(z)\,\frac{1}{(c_k z + d_k)^{2m}}$$

für jede Substitution der $\left(z, \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right)$ der vorgelegten FUCHSschen Gruppe. Übrigens muß man zwei Arten von FUCHSschen Gruppen und dementsprechend von FUCHSschen Thetafunktionen unterscheiden. Für die eine ist der Fundamentalkreis eine sogenannte natürliche Grenze, und sie existiert nur innerhalb dieses Kreises, für die andere Art finden sich an der Peripherie des Fundamentalkreises nur isolierte singuläre Stellen vor und die Funktionen dieser Art können über diesen Kreis hinweg über die ganze Ebene fortgesetzt werden.

In Analogie zu dem üblichen Ansatze in der Theorie der elliptischen Funktionen stellt nun POINCARÉ durch Quotienten von Θ-Funktionen gleichen Grades m solche Funktionen her, die gegen alle Transformationen der vorgelegten FUCHSschen Gruppe unempfindlich bleiben. Es sind dies die FUCHSschen Funktionen, für die nun analoge Gesetze gelten, wie für die elliptischen Funktionen. Die Zahl der Null- und Unendlichkeitsstellen innerhalb eines Fundamentalpolygons ist die gleiche. Zwei FUCHSsche Funktionen derselben Gruppe sind stets durch eine algebraische Gleichung verbunden, deren Geschlecht mit dem anschauungsmäßig definierten Geschlechte der Gruppe übereinstimmt. So ist ein Anknüpfungspunkt an die Theorie der algebraischen Funktionen gegeben, den POINCARÉ in erfolgreicher Weise zum Beweis des wichtigen Satzes benützt: Die Koordinaten der Punkte einer beliebig vorgelegten algebraischen Kurve können stets als eindeutige Funktionen eines Parameters dargestellt werden. Als ähnlich wirksames Instrument der Untersuchung haben sich die FUCHSschen Funktionen für die Theorie der ABELschen Integrale erwiesen, für deren Reduzibilität auf Integrale niederen Geschlechtes POINCARÉS Untersuchungen als diejenigen zu erwähnen sind, die in das Wesen der Frage aufs tiefste eindringen.

Durch die Einführung der sogenannten FUCHSschen Zetafunktionen, die als Quotienten einer Reihe mit rationalen Gliedern und einer Θ-Reihe definiert werden, gelang es POINCARÉ schließlich zu beweisen, daß vermittels dieser neuen Transzendenten die Lösungen von linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten algebraische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, in analoger Weise ausgedrückt

werden können, wie etwa die Integrale von algebraischen Differentialen durch ABELsche Θ-Funktionen.

Hiermit hatte POINCARÉ für das Studium der automorphen Funktionen und deren Anwendungen ein weites Feld eröffnet und durch die Klarlegung des Zusammenhanges dieser Theorie mit derjenigen der linearen Differentialgleichungen die letztere mit neuen und fruchtbaren Methoden bereichert.

Von POINCARÉS weiteren funktionentheoretischen Untersuchungen sei ferner die Abhandlung „Sur un théorème de la théorie générale des fonctions" (Bulletin de la Société mathématique de France 1883) hervorgehoben. Es handelte sich hier darum, allgemein die Theorie der mehrdeutigen analytischen Funktionen auf diejenige der eindeutigen Funktionen zurückzuführen. In der Tat ist es POINCARÉ gelungen, den folgenden grundlegenden Satz von großer Allgemeinheit aufzustellen: Ist y eine beliebige mehrdeutige analytische Funktion von x, so kann man stets eine Veränderliche z von der Art bestimmen, daß x und y als eindeutige Funktionen derselben dargestellt werden können.

Es sei hier ferner der wichtigen Arbeit POINCARÉS gedacht, die sich auf das LAGUERRESche Geschlecht von transzendenten ganzen Funktionen bezieht und deren Hauptsätze für die transzendente ganze Funktion $f(x) = \Sigma A_n x^n$ vom Geschlechte p die Wachstumseigenschaft $|f(x)| < e^{|x|^{p+1}}$ und für die Koeffizienten die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} A_n (n!)^{\frac{1}{p+1}} = 0$$

liefern, die in späteren wichtigen Untersuchungen eine Rolle spielen.

Für die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen war es von großer Bedeutung die Frage zu beantworten, von welcher Mächtigkeit die Menge der Funktionswerte einer mehrdeutigen analytischen Funktion an einer beliebigen Stelle ihres Bereiches sein möge. POINCARÉ hat nun bewiesen, daß die vollständige Bestimmung einer analytischen Funktion stets durch eine abzählbare Menge von Funktionselementen bewirkt werden kann, und daß demnach die Menge der Funktionswerte an einer beliebigen Stelle ihres Bereiches auch abzählbar ist.

Daß die Verwendung von divergenten Reihen unter gewissen Voraussetzungen als legitimes Mittel mathematischer Forschung wieder wirksam wurde, ist vornehmlich dem Umstande zuzuschreiben, daß sich POINCARÉ der von ihm als asymptotisch bezeichneten Darstellungen sowohl gelegentlich seiner Untersuchungen über die irregulären Lösungen von linearen Differentialgleichungen als auch in seiner berühmten Abhandlung „Sur le problème de trois corps et les équations de la dyna-

mique" im reichlichsten Maße bediente und damit zu ähnlichen Untersuchungen die Anregung gegeben hat.

Eine neue Wendung gab er auch der Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten Zahlen durch den Hinweis auf den Zusammenhang derselben mit LIES Gruppentheorie, wodurch die Theorie der komplexen Zahlen in ganz neuem Lichte erscheint und an die Lösung ihrer Grundprobleme mit den Hilfsmitteln der Gruppentheorie herangetreten werden konnte.

Erwähnt sei noch die Theorie von linearen Gleichungssystemen von unbegrenzt vielen Gleichungen mit unbegrenzt vielen Unbekannten, in welcher POINCARÉ als erster allgemeine Konvergenzkriterien für die auftretenden unendlichen Determinanten gab.

Ich muß noch in Kürze derjenigen Arbeiten POINCARÉS gedenken, die den Boden für den Ausbau einer allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen vorbereiten. Hier ist zuerst seine Abhandlung „Sur les résidus des intégrales doubles" zu nennen. Zwischen der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen und derjenigen von mehreren Veränderlichen zeigen sich schon in den Anfangsgründen tiefreichende Unterschiede. Die direkte Übertragung von Sätzen der einen Theorie auf die andere gelang bisher in den seltensten Fällen. POINCARÉ hat nun gezeigt, auf welche Weise die grundlegenden CAUCHYschen Residuensätze für mehrfache Integrale ausgesprochen werden können und wendet dieselben auf das Studium der Periodizitätsmodulen von mehrfachen Integralen und der ABELschen Thetafunktionen an.

In diesem Zusammenhange seien noch seine Untersuchungen auf dem Gebiete der Analysis situs von höhern Mannigfaltigkeiten hervorgehoben (1895—1904). Er gelangt hierbei u. a. zu dem wichtigen Resultat, daß eine Mannigfaltigkeit höherer Dimension durch die Angabe der BETTIschen Zusammenhangszahlen allein im Sinne der Analysis situs noch nicht bestimmt ist, vielmehr lassen sich zu einem System von BETTIschen Zahlen noch unendlich viele Mannigfaltigkeiten bilden, die nicht ineinander deformierbar sind. Insbesondere ist hier zu erwähnen die Ausdehnung des EULERschen Polyedersatzes auf Polyeder von beliebiger Dimension und beliebigem Zusammenhang.

POINCARÉ war es, der als erster für das folgende WEIERSTRASSsche Theorem einen Beweis geführt hat: Ist eine analytische Funktion von zwei komplexen Variabeln überall meromorph, so kann sie stets als Quotient von zwei ganzen Funktionen derselben Variabeln dargestellt werden.

Ferner sei noch einer bemerkenswerten Verallgemeinerung des ABELschen Theorems gedacht, die folgendermaßen ausgesprochen werden kann: Sind $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_q, y_q, z_q)$ die Koordinaten der Schnittpunkte einer algebraischen Fläche mit einer algebraischen Raumkurve C, sind

ferner $(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i)$ die Koordinaten des Schnittpunktes einer der C benachbarten Raumkurve C', so besteht eine Anzahl von Beziehungen

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_q dx_q = 0,$$

wobei die X_i rationale Funktionen der x, y, z sind.

Es mögen noch seine Untersuchungen über das Verschwinden der Abelschen Thetafunktion, sein Beweis über die Darstellung der Abelschen Funktionen durch Thetaquotienten und schließlich die Verallgemeinerung des Satzes von der Residuensumme der elliptischen Funktionen auf Abelsche hervorgehoben werden (1902).

Auch die Theorie der allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichungen hat durch Poincarés Untersuchungen eine Bereicherung erfahren. Ich denke hierbei in erster Linie an jene topographischen Untersuchungen der Lösungen von Differentialgleichungen, die gewissermaßen eine qualitative Analyse der Integrale noch vor deren Ermittelung zulassen. Diese lange Reihe von Untersuchungen, mit denen Poincaré seine Arbeit über das Dreikörperproblem gewissermaßen vorbereitet hat, sind vermöge der Fülle der enthaltenen Resultate noch zu einer bedeutungsvollen Rolle berufen.

Von Poincarés zahlentheoretischen Arbeiten sei zuvörderst seine Abhandlung „Sur un mode nouveau de représentation géometrique des formes quadratiques définies ou indéfinies" erwähnt, in der er zunächst eine Arithmetik der Gittersysteme (réseaux) entwickelt und vermittels derselben die Äquivalenztheoreme und die Gausssche Theorie der Komposition von quadratischen Formen in sinnreicher Weise geometrisch darstellt. Die Übertragung der hier entwickelten Methoden auf Mannigfaltigkeiten von höheren Dimensionen führte ihn später zu einer interessanten Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus. Zu erwähnen sind ferner seine Arbeiten über arithmetische Invarianten, die er durch Reihen und Integrale darstellt und auf die Erledigung von Äquivalenzfragen anzuwenden weiß. Durch die Betrachtung derjenigen diskontinuierlichen Gruppen von linearen Substitutionen, die eine ternäre indefinite quadratische Form unverändert lassen, gewinnt er einen Anschluß an die Theorie der automorphen Funktionen. Jede dieser Gruppen ist mit einer speziellen Fuchsschen Gruppe isomorph. Die zu dieser Fuchsschen Gruppe gehörigen sogenannten arithmetischen Fuchsschen Funktionen zeichnen sich dadurch aus, daß sie ein Additionstheorem besitzen, was bei allgemeinen Fuchsschen Funktionen nicht der Fall ist. Die mannigfachen Beziehungen, die zwischen arithmetischen Fuchsschen Funktionen bestehen, eröffnen der Zahlentheorie und Algebra ein aussichtsreiches Feld für neue Untersuchungen. Algebraisch-arithmetischen Charakters sind seine Arbeiten über die Äquivalenz von Formen höherer Ordnung, die als wesentliche Weiter-

führung der bezüglichen Hermiteschen und Jordanschen Untersuchungen zu betrachten sind.

Ich gehe nun auf die Arbeiten Poincarés über, die sich auf Probleme der Mechanik und theoretischen Physik beziehen. Als bedeutendstes in dieser Reihe ist an erster Stelle seine große preisgekrönte Abhandlung „Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique“ (Acta Mathematica Bd. XIII, 1890) zu erwähnen. Angesichts der großen Schwierigkeiten, die sich der Integration der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems entgegenstellen, haben auch Poincarés Untersuchungen im wesentlichen nur zu negativen Resultaten geführt. Aber als großes Verdienst ist es ihm anzurechnen, daß er auf die Unzulänglichkeit der heutigen mathematischen Methoden für die Lösung des Problems nicht bloß hingewiesen, sondern dieselbe auch bewiesen hat. Es gelang ihm mit voller Strenge den Nachweis zu führen, daß es außer den bekannten Integralen des Problems keine weiteren eindeutigen analytischen Integrale geben könne, so daß die Lösung des Problems ganz andere Hilfsmittel erheischt, als diejenigen, über die wir heute verfügen. Einer eingehenden Untersuchung unterzieht er den speziellen Fall des Problems, in welchem die Masse A groß, B klein und C unendlich klein angenommen wurden und A und B Kreisbewegungen ausführen. Er führt zur Behandlung die auch mathematisch höchst fruchtbaren Methoden der Integralinvarianten, variierten Differentialgleichungen, charakteristischen Exponenten, periodischen und asymptotischen Lösungen ein, und es gelingt ihm für den erwähnten Spezialfall nachzuweisen, daß im Falle, daß AC endlich bleibt, die Massen A, B, C ihren ursprünglichen Positionen unendlich oft wieder beliebig nahe kommen. Überdies ist diese bewundernswerte Abhandlung reich an weittragenden Prinzipien für die praktische Erledigung der Probleme der himmlischen Mechanik, die heute auch der praktische Astronom anerkennt.

Von nicht geringerer Wichtigkeit ist seine folgenreiche Abhandlung „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation“ (1885). Für das alte klassische Problem der Gleichgewichtsformen rotierender Flüssigkeiten schafft hier Poincaré eine äußerst sinnreiche neue Theorie. Nach der Einführung der sogenannten Bifurkations- und Grenzformen, der Stabilitätskoeffizienten, sowie nach einer höchst interessanten neuen Begründung der Theorie Lamé'scher Funktionen, gelingt es ihm nicht allein den Beweis für die Existenz der von Mathiessen und W. Tomson angegebenen Gleichgewichtsformen zu führen, sondern auch die Existenz von unendlich vielen anderen nachzuweisen. Insbesondere sei hier die durch Poincaré als pyriforme (birnenförmig) benannte Gleichgewichtsfigur erwähnt, die zu bekannten kosmogenetischen Untersuchungen Anlaß geboten hat. Betreffs der Stabilität der Gleichgewichtsformen hat sich durch die Dis-

kussion der Vorzeichen der Stabilitätskoeffizienten folgendes Resultat ergeben. Rotationsellipsoide, die weniger abgeplattet sind als das JAKOBIsche Ellipsoid E, falls dasselbe auch ein Rotationsellipsoid ist, sind stabile Gleichgewichtsfiguren. Die dreiachsigen Ellipsoide sind stabil, wenn sie länglich sind. Diese Resultate bestehen auch für den Fall, daß eine Viskosität vorhanden ist. Rotationsellipsoide, deren Abplattung größer als diejenige von E ist, sind nur für reibungslose Flüssigkeiten stabile Gleichgewichtsfiguren.

Zu erwähnen ist hier ferner seine Abhandlung „Sur les équations aux derivées partielles de la physique mathématique" (1886). Eine große Anzahl von Problemen der theoretischen Physik hat auf die LAPLACEsche oder ähnliche partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung geführt. Trotz der großen Mannigfaltigkeit der vorkommenden Grenzbedingungen läßt das Wesen und die Behandlung dieser Probleme sozusagen einen gewissen gemeinschaftlichen Familienzug erkennen, so daß man auch für die Lösungen dieser Probleme eine Anzahl von gemeinschaftlichen Eigenschaften zu erwarten hat. Ein hervorstechender gemeinschaftlicher Zug zeigt sich unglücklicherweise in den enormen Schwierigkeiten, die sich bei dem Existenzbeweis der Lösungen einstellen. POINCARÉ unternimmt es in dieser Abhandlung diese Schwierigkeiten für eine Reihe dieser Probleme zu bekämpfen. So gelangt er hinsichtlich der Lösung des DIRICHLETschen Problems zu seiner äußerst originellen „méthode du balayage". In der gleichen ausführlichen Weise hat noch POINCARÉ das von FOURIER herrührende Problem der Erkaltung eines Körpers behandelt.

Im engen Zusammenhange hiermit steht seine Abhandlung „Sur les équations de la physique mathématique" (1894), in welcher er eine Reihe der schwierigsten und bedeutendsten Probleme der mathematischen Physik der Lösung zuzuführen vermag. Das Problem der Schwingungen einer gespannten Membran, die Elastizitätstheorie, die FOURIERsche Theorie der Wärmeleitung und auch noch zahlreiche andere Probleme der mathematischen Physik führen gleicherweise auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \xi v + f = 0, \tag{1}$$

in welcher ξ eine Konstante, f aber eine gegebene Funktion der Koordinaten bedeutet. POINCARÉ behandelte insbesondere die allgemeine Randwertaufgabe: Es soll v als Funktion der Koordinaten derart bestimmt werden, daß es die Gleichung (1) befriedigt, nebst seinen ersten und zweiten Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes kontinuierlich ist und an den Stellen der Grenzfläche desselben Gebietes die Bedingung

$$\frac{dv}{dn} + bv = 0$$

erfüllt, wobei $\frac{dv}{dn}$ den Differentialquotienten nach der Normalen, b aber eine Konstante bedeutet.

Durch äußerst scharfsinnige Anwendung von Methoden, die teils von SCHWARZ und teils von C. NEUMANN herühren, gelingt ihm die strenge Lösung dieses Problems für die überwiegende Zahl von Fällen. Hervorzuheben sind hierbei die Reihe von an sich bedeutenden Hilfssätzen, die sich auf Integrale von der Form

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

beziehen und die POINCARÉ als wirkungsvolles Instrument seiner Untersuchung anzuwenden verstanden hat.

In diesem Zusammenhange möge noch seine Abhandlung „La méthode de NEUMANN et le problème de DIRICHLET" hervorgehoben werden. Bekanntlich hat C. NEUMANN eine Methode entwickelt, vermittels deren man eine harmonische Funktion innerhalb eines Gebietes durch konvergente Ausdrücke darstellen kann, falls ihre Werte für alle Stellen der überall konvexen Grenzfläche dieses Gebietes gegeben sind. POINCARÉ gelang es nun, die NEUMANNsche Methode auf Begrenzungsflächen zu erweitern, die in allen Punkten eine bestimmte Tangentialebene und zwei bestimmte Hauptkrümmungsradien besitzen, im übrigen aber hinsichtlich ihrer Gestalt beliebig gegeben sind. Von besonderer Wichtigkeit sind hier POINCARÉS Entwicklungen, die sich auf die sogenannten Fundamentalfunktionen beziehen. Zu jeder Begrenzungsfläche gehört eine unendliche Reihe solcher Fundamentalfunktionen, die für kugelförmige Begrenzungsflächen in die bekannten Kugelfunktionen übergehen. POINCARÉ bemerkt, daß eine willkürliche Funktion sich nach Fundamentalfunktionen entwickeln lasse, wobei die Entwicklungskoeffizienten durch mehrfache Integrale ausgedrückt werden, die über diejenige Fläche zu erstrecken sind, der die Fundamentalfunktionen angehören. Sind diese Fundamentalfunktionen einer Fläche bekannt, so kann das DIRICHLETsche Problem sowohl für den Innenraum als den Außenraum der Fläche ohne Schwierigkeit gelöst werden.

Erwähnt sei noch die stattliche Reihe von Büchern, mit denen POINCARÉ die mathematische Literatur bereichert hat. Besonders seien die Werke „Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Leçons de Mécanique céleste (1905), La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes; La télégraphie sans fil und La Science et l'Hypothèse (1902)" hervorgehoben, ferner auch seine „Cours de physique mathématique": Théorie mathématique de la lumière (1887 auch ins

Deutsche übertragen); Electricité et Optique (1890, auch übersetzt); Thermodynamique (1890); Leçons sur la théorie de l'Elasticité (1890); Théorie des tourbillons (1891); Les oscillations électriques (1892); Capillarité (1895); Théorie analytique de la propagation de la chaleur (1895); Calcul des Probabilités (1897); Cinématique et mécanismes (1899); Théorie du potentiel newtonien (1899); Figures d'équilibre d'une masse fluide (1902).

Ich habe in meinen bisherigen Ausführungen nur eines geringen Bruchteiles von den mehr als 300 Publikationen Poincarés flüchtig gedenken können; ich glaube jedoch, daß auch schon aus dem Angeführten klar hervorgeht, welch beherrschende Stellung wir Poincarés Leistungen in der mathematischen Literatur zuerkennen müssen, deren Entwicklung er durch eigenes Forschen nahezu auf allen Gebieten auf das wirksamste gefördert, überall aber durch die Fülle der durch ihn ersonnenen neuen Ideen und Methoden weitgehend befruchtet hat, so daß er sich würdig jenen großen französischen Mathematikern anschließt, in deren Reihen die Namen Laplace, Galois, Cauchy, Hermite von unvergänglichem Glanze sind.

Zum Schlusse sei mir noch gestattet seines letzterschienenen Werkes „Sur la valeur de la science" (1905) zu gedenken, in welchem er gewissermaßen das Glaubensbekenntnis des Gelehrten niedergelegt hat.

Ich möchte aus diesem hochinteressanten Buche eine Stelle wörtlich zitieren, an der er den Gegensatz anschauungsmäßiger und logischer Denkweise des näheren ausführt. Bezüglich der Logiker meint nun Poincaré: „En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible, ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cette appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares!"

Einer dieser Bewundernwerten und Seltenen ist David Hilbert, der Meister der logischen Analyse in der Mathematik. Mit glänzender logischer Kombinationskraft begabt, schafft er aus sich selber heraus, lediglich durch die Verallgemeinerung, durch das Trennen und Verknüpfen, durch das Sammeln von mathematischen Begriffen, so daß eine äußere, durch Anschauung vermittelte Anregung gar nicht erkennbar wird.

Logische Strenge und Schlichtheit der Beweisführung gelten ihm als adäquate Anforderungen, und er ist davon überzeugt, daß logische Schärfe — richtig erfaßt — niemals zur Sterilisierung, sondern vielmehr stets zur fruchtbaren Weiterentwicklung mathematischer Ideen führen müsse. Er wendet sich in seinen Forschungen mit Vorliebe den schwierigsten, lange Zeit unerledigt gebliebenen Problemen zu, deren Kern er mit bewundernswertem Scharfsinn so zu erfassen vermag, daß seine Betrachtungen nicht allein diese Probleme vollständig erledigen, sondern oft auch der ganzen Disziplin, der diese Probleme angehörten, einen Abschluß geben.

Von diesem Charakter sind schon seine ersten großen Abhandlungen, in denen HILBERT eine Begründung für den Fundamentalsatz der Invariantentheorie entwickelt. Diesen Satz hatte GORDAN für den Fall von Systemen binärer Grundformen bewiesen; die Methoden, die er hierbei angewendet hat, versagten jedoch in den Fällen, wo die Grundformen mehr als zwei Veränderliche enthalten oder auch dann, wenn die Grundformen mehrere Reihen von zwei Veränderlichen enthalten, die verschiedenen linearen Transformationen unterliegen. Um sich die Mittel für den lange gesuchten Beweis des allgemeinen Theorems zu schaffen, stellt HILBERT eine ganz neue Theorie der Modulsysteme von Formen voran, in welcher er Sätze von der größten Bedeutung entwickelt. Ein bereits klassisch gewordenes, tief erdachtes Theorem bildet hierzu den Ausgangspunkt. Es lautet wie folgt: Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, \ldots$, so gibt es stets eine Zahl m von der Art, daß jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

bringen läßt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignete Formen der nämlichen Veränderlichen sind mit Koeffizienten, die demselben Rationalitätsbereiche angehören wie diejenigen der F. Diesem Satz gab er eine arithmetische Verfeinerung, indem er seine Gültigkeit auch für den Fall erweisen konnte, daß den auftretenden Koeffizienten die Beschränkung, ganze rationale Zahlen zu sein, auferlegt wird. Für die Modultheorie haben diese Sätze die Bedeutung, daß man aus den Formen eines Moduls stets eine endliche Anzahl von Formen so auswählen kann, daß jede andere Form des Moduls durch eine lineare Kombination jener ausgewählten Formen darstellbar ist. In geometrischer Deutung heißt das so viel, daß sich durch eine gegebene algebraische Raumkurve stets eine endliche Zahl von Flächen

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$$

hindurchlegen lasse derart, daß jede andere die Kurve enthaltende Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = 0$$

dargestellt werden kann, wo unter $A_1, \ldots, A_m$ quaternäre Formen zu verstehen sind.

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchungen wendet sich HILBERT dem Studium gewisser Systeme von linearen Diophantischen Gleichungen zu, aus deren Lösungen er die sogenannten abgeleiteten Systeme bildet, und durch äußerst scharfsinnige Betrachtungen gelangt er zu folgendem abschließenden Resultat. Ist das Gleichungssystem

$$F_{t1}X_1 + F_{t2}X_2 + \cdots + F_{tm}X_m = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

vorgelegt, worin $F_{t1}, \ldots, F_{tm}$ gegebene Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten, so führt die Aufstellung der Relationen zwischen den Lösungen desselben zu einem zweiten Gleichungssystem von derselben Gestalt, zum sogenannten abgeleiteten System, das wiederum ein abgeleitetes System liefert u. s. f. Das so begonnene Verfahren erreicht nun immer (spätestens beim $n$ten abgeleiteten System, das sicher keine Lösung mehr hat) ein Ende. Durch die Kette von abgeleiteten Gleichungssystemen gewinnt HILBERT einen tiefen Einblick in die algebraische Struktur des Modulsystems $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und ist in den Stand gesetzt, die Anzahl derjenigen Bedingungen zu ermitteln, welche die Koeffizienten einer Form von der Rten Ordnung zu erfüllen haben, um nach dem Modulsystem $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null kongruent zu sein. Die Anzahl der voneinander linear unabhängigen Bedingungen $\chi(R)$ stellt HILBERT durch die bemerkenswerte Formel

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \cdots + \chi_d \binom{R}{d} \qquad d < n$$

dar, wo $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ gewisse dem Modulsystem $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ eigentümliche ganze Zahlen bedeuten und übrigens R oberhalb einer bestimmten Grenze genommen werden muß, ferner die Symbole $\binom{R}{k}$ Binomialkoeffizienten bezeichnen. Diese ganzzahlige Funktion $\chi(R)$ nennt HILBERT die charakteristische Funktion des Moduls und beweist den für die Modultheorie wichtigen Satz, daß die Summe der charakteristischen Funktionen zweier Modulsysteme stets gleich ist der Summe, die aus den charakteristischen Funktionen des größten gemeinsamen und des kleinsten enthaltenden Modulsystems gebildet wird.* Neben-

* Sind $(F_1, F_2, \cdots, F_m)$ und $(H_1, H_2, \cdots, H_h)$ zwei Moduln, und ist für die Gleichung

$$F_1 X_1 + \cdots + F_m X_m = H_1 Y_1 + \cdots + H_h Y_h$$

das volle Lösungssystem

$$X_1 = F_{1s}, \; X_2 = F_{2s}, \cdots, X_m = F_{ms},$$
$$Y_1 = H_{1s}, \; Y_2 = H_{2s}, \cdots, Y_h = H_{hs}$$
$$(s = 1, 2, \cdots, k)$$

und bildet man die Formen

$$K_s = \sum_{i=1}^{m} F_i F_{is} = \sum_{j=1}^{h} H_j H_{js},$$

so ist $(K_1, K_2, \cdots, K_k)$ der kleinste enthaltende Modul, während bekanntlich $(F_1, F_2, \cdots, F_m; H_1, H_2, \cdots, H_h)$ als der größte gemeinsame Modul bezeichnet wird.

bei ist es von Interesse zu bemerken, daß die Koeffizienten $\chi_0, \ldots, \chi_d$ mit den von NÖTHER definierten Geschlechtszahlen der durch das Modulsystem definierten Raumkurve auf das engste zusammenhängen.

Mittels dieser Sätze und eines Satzes über den Ω-Prozeß, dessen wesentlicher Inhalt von GORDAN und MERTENS herrührt, gelingt es nun HILBERT, den Fundamentalsatz der Invariantentheorie unter den allgemeinsten Voraussetzungen nachzuweisen. Derselbe lautet in HILBERTS Formulierung wie folgt. Ein System von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen, welche in vorgeschriebener Weise gleichen oder verschiedenen Transformationen unterliegen, hat stets eine endliche Zahl von ganzen und rationalen Invarianten, durch welche sich jede andere ganze und rationale Invariante in ganzer und rationaler Weise ausdrücken läßt.

Das gleiche gilt von den Kovarianten, Kombinanten und Kontravarianten, da diese Bildungen sich unter den Invariantenbegriff zusammenfassen lassen.

Versteht man unter einer irreduziblen Syzygie eine solche Relation zwischen den Invarianten des Grundformensystems, deren linke Seite nicht durch lineare Kombination von Syzygien niederer Art erhalten werden können, so bestehen die beiden abschließenden Sätze HILBERTS:

Ein endliches System von Invarianten besitzt nur eine endliche Zahl von irreduziblen Syzygien.

Die Systeme irreduzibler Syzygien verschiedener Arten bilden eine Kette abgeleiteter Gleichungssysteme, die spätestens beim $(m+1)$ten Gliede abbricht, wenn m die Zahl der Invarianten des vollen Systems bezeichnet.

Nachdem HILBERT die Existenz des vollen Invariantensystems nachgewiesen hatte, war nun das Problem gegeben, die wirkliche Aufstellung desselben auf eine endliche Anzahl, von Beginn der Rechnung übersehbarer Prozesse zurückzuführen. HILBERT gab nun seinen Untersuchungen eine merkwürdige Wendung, die die ganze Invariantentheorie in neuem Lichte erscheinen läßt. Es kann nämlich die Invariantentheorie der Theorie der algebraischen Funktionenkörper derart untergeordnet werden, daß sie lediglich als bemerkenswertes Beispiel für diese Theorie erscheint etwa so, wie in der Zahlentheorie der Kreisteilungskörper heute nur mehr als Beispiel unter den allgemeinen Zahlkörpern gelten kann, an dem die Sätze der allgemeinen Zahlkörper zuerst erkannt wurden. HILBERT führt nun den Nachweis dafür, daß sich zu jedem Grundformensystem stets ein algebraischer Funktionenkörper konstruieren lasse, dessen ganze algebraische Funktionen genau mit den ganzen rationalen Invarianten des vorgelegten Grundformensystems übereinstimmen. Dies ist der Invariantenkörper. Unter der Heranziehung des KRONECKERschen fundamentalen Theorems über das

Fundamentalsystem eines Körpers ist es nun klar, daß nach der Kenntnis des Invariantenkörpers zur Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung elementarer Aufgaben aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen nötig ist.

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen beweist HILBERT einen Satz, der sich den früher erwähnten schönen Theoremen über Modulsysteme würdig anreiht, und den ich seiner Wichtigkeit und vielseitigen Verwendbarkeit wegen besonders hervorheben möchte. Derselbe lautet: Sind m ganze rationale homogene Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt und sind ferner $F, F', F'', \ldots$ irgendwelche ganze rationale homogene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von der Beschaffenheit, daß sie für alle diejenigen Wertsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche die vorgelegten m Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sämtlich gleich Null sind, dann ist es stets möglich, eine ganze Zahl r zu bestimmen derart, daß jedes Produkt $\Pi^{(r)}$ von beliebigen r Funktionen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ dargestellt werden kann in der Gestalt

$$\Pi^{(r)} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ geeignet gewählte ganze rationale homogene Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Dieser Satz, den HILBERT in einer späteren Arbeit in sinnreicher Weise zu einem überaus einfachen Beweis eines DEDEKINDschen Theorems über hyperkomplexe Zahlen angewendet hatte, bildet den Kern der ganzen Theorie der algebraischen Invarianten. Die weitere Theorie wird auf die Bestimmung der sogenannten Nullformen aufgebaut, d. h. von Formen, deren Koeffizienten solche numerische Werte besitzen, daß alle ihre Invarianten verschwinden. Eine jede dieser Nullformen kann durch eine unimodulare Substitution auf eine kanonische Form gebracht werden und die Aufgabe alle Nullformen aufzustellen, ist somit auf die Bestimmung aller kanonischen Nullformen zurückgeführt. Die hierzu notwendige Lösung von Diophantischen Ungleichungen geschieht am besten auf graphischem Wege. Für die Aufstellung des vollen Invariantensystems gibt HILBERT schließlich das folgende Verfahren an:

1. Man stelle ein System S_1 von Invarianten auf, durch welche sich alle anderen Invarianten der Grundform als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen; ein derartiges System S_1 erhält man, indem man solche Invarianten auswählt, deren Verschwinden überhaupt das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat.

2. Man stelle ein System S_2 von Invarianten auf, durch welche sich alle übrigen Invarianten rational ausdrücken lassen.

3. Man berechne ein vollständiges System von ganzen algebraischen Funktionen in dem durch die Systeme S_1 und S_2 bestimmten

Funktionenkörper. Die Funktionen dieses Systems S_3 sind Invarianten und bilden zusammengenommen mit den Invarianten S_1 das gesuchte volle Invariantensystem.

Von diesen drei Aufgaben ist die erste die schwierigste; sie wird gelöst, indem man solche Invarianten ermittelt, deren Verschwinden notwendig das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat; zu ihrer Ermittelung genügt es, alle diejenigen Invarianten in Betracht zu ziehen, deren Gewicht eine gewisse Zahl nicht übersteigt. Übrigens zeigt HILBERT, daß das volle System der Invarianten auch ohne Kenntnis eines Systems S_2 aufgestellt werden könne.

HILBERTS Arbeiten haben somit für alle wesentlichen und bis dahin ungelösten Fragen der Invariantentheorie die langgesuchte Erledigung in der vollkommensten Weise gebracht, so daß dank derselben die Lehre von den Invarianten hinsichtlich der theoretischen Fragen als abgeschlossen betrachtet werden kann.

Ich wende mich nun den arithmetischen Untersuchungen HILBERTS zu. Die Zahlentheorie hat vermöge der Schlichtheit ihrer Grundlagen, der Exaktheit ihrer Begriffe, der methodischen Reinheit ihrer Schlüsse von jeher als Muster für alle andern mathematischen Disziplinen gegolten, hat jedoch zu ihrer Beherrschung und Förderung ein großes Abstraktionsvermögen zur unerläßlichen Voraussetzung. Wir können uns daher nicht wundern, daß sie auf HILBERT, den abstrakten Denker, auch ihren Zauber ausübte und ihn zu tiefgehenden Untersuchungen anreizte. Ich führe seine eigenen Worte an, die sein Empfinden hierfür am klarsten zum Ausdruck bringen. „Die Theorie der Zahlkörper ist wie ein Bauwerk von wunderbarer Schönheit und Harmonie; als der am reichsten ausgestattete Teil dieses Bauwerkes erscheint mir die Theorie der ABELschen und relativ-ABELschen Körper, die uns KUMMER durch seine Arbeiten über die höheren Reziprozitätsgesetze und KRONECKER durch seine Untersuchungen über komplexe Multiplikasion der elliptischen Funktionen erschlossen haben. Die tiefen Einblicke, welche die Arbeiten dieser beiden Mathematiker in die genannte Theorie gewähren, zeigen uns zugleich, daß in diesem Wissensgebiete eine Fülle der kostbarsten Schätze verborgen liegt, winkend als reicher Lohn dem Forscher, der den Wert solcher Schätze kennt und die Kunst, sie zu gewinnen mit Liebe betreibt.“* Diesen schönen Worten HILBERTS haben wir nur hinzuzufügen, daß HILBERT selbst es ist, dem es gelang die tiefstverborgenen und kostbarsten dieser Schätze zu heben. Von seinen arithmetischen Untersuchungen sei als erste „Ein neuer Beweis des KRONECKERschen Fundamentalsatzes über ABELsche Zahlkörper“ (1896) erwähnt. KRONECKER hatte schon im Jahre 1853 den fundamentalen Satz aufgestellt, daß die Wurzeln aller

* Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht von D. HILBERT 1897.

Abelschen Gleichungen im Bereiche der rationalen Zahlen sich durch Einheitswurzeln ausdrücken lassen. Lange Zeit blieb dieser fundamentale Satz unbewiesen, und erst nach 30 Jahren hatte für denselben H. Weber unter Heranziehung von transzendenten Hilfsmitteln einen äußerst schwierigen Beweis erbracht. Hilbert liefert nun mit Hilfe einer Reihe durch ihn eingeführter Begriffsbildungen und unter Anwendung des Diskriminantensatzes von Minkowski einen einfachen arithmetischen Beweis dieses Satzes, aus dem zugleich ersichtlich wird, auf welche Weise man alle Abelschen Körper von gegebener Gruppe und Diskriminante aufstellen kann.

Ich muß des ferneren seines schon früher zitierten Berichtes „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper" gedenken. Es ist dies ein Bericht über die Entwicklungsgeschichte der Theorie der algebraischen Zahlkörper, der in Folge seiner klaren Anordnung, der präzisen Beweisführung als Musterbild einer Zusammenfassung gelten kann, hierüber hinaus aber vermöge der Fülle in demselben zuerst veröffentlichter neuer Begriffsbildungen und Methoden als wesentliche Weiterführung der Theorie der algebraischen Zahlkörper zu betrachten ist. Relativkörper, Relativnorm, Relativdiskriminante, Verzweigungskörper usw. sind alles von Hilbert herrührende Begriffsbildungen, die hier zuerst im systematischen Zusammenhang entwickelt wurden. Als besonders folgenreich hat sich die von Hilbert hier entwickelte Theorie des Kummerschen Zahlkörpers erwiesen, ferner die Bildung des Begriffs der Normenreste dieses Körpers. Mittels dieses Begriffs gelingt es, das allgemeine Reziprozitätsgesetz für Potenzreste durch die Formel

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\mu \cdot \nu}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

darzustellen, wo $\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right)$ eine gewisse Einheitswurzel bedeutet und das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers zu erstrecken ist.

In seiner Abhandlung „Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper" hat er die Theorie der quadratischen Reste für den Fall entwickelt, daß der Grundkörper k imaginär und von ungerader Klassenanzahl ist. Als wichtigstes Resultat dieser Untersuchungen kann das Reziprozitätsgesetz in k gelten und jener Satz, demzufolge in einem relativ-quadratischen Körper stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten sind, und der gewissermaßen als Verallgemeinerung der bekannten Sätze von Gauss gelten kann.

In seiner wichtigen Abhandlung „Über die Theorie der relativen Abelschen Körper" wird die Gültigkeit dieser Sätze auf beliebige Körper k ausgedehnt. Als grundlegend wichtiges Hilfsmittel der

Untersuchung wird hier zuerst die Begriffsbildung des Klassenkörpers eingeführt.

Es ist dies jener in bezug auf k relativ-Abelsche Zahlkörper von der Relativdiskriminante 1, der alle in bezug auf k unverzweigten Körper als Teilkörper enthält. Kronecker wurde schon im Jahre 1856 zu der überraschenden Bemerkung geführt, daß es zu jedem imaginären quadratischen Körper einen zu assoziierenden Zahlkörper von der Relativdiskriminante 1 gibt, nach dessen Adjunktion die sämtlichen Ideale des Grundkörpers zu wirklichen ganzen algebraischen Zahlen werden. Er bezeichnet es als höchstes, erstrebenswertes Ziel der Zahlentheorie, die Natur dieses zu assoziierenden Zahlkörpers zu ergründen. Die Hilfsmittel hierzu hat nun Hilbert geschaffen, durch dessen grundlegende Untersuchungen angeregt, es H. Ph. Furtwängler (1904) gelungen ist, den Klassenkörper für einen beliebig vorgelegten Zahlkörper wirklich zu konstruieren.

Als Meisterwerk und Beleg seines großen Talentes für die Vereinfachung schwieriger Beweise sei noch einer seiner älteren Arbeiten „Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale“ (1894) gedacht, in welcher er den bekannten Dedekindschen Satz unter der Zugrundelegung des Galoisschen Zahlkörpers aufs lichtvollste und übersichtlichste beweist. Ferner auch seines Beweises für die Transzendenz der Zahlen e und π. Hier hat er den Kern des Hermiteschen und Lindemannschen Beweises seines unnötigen Beiwerkes entkleidet, indem er das Nichtverschwinden eines Ausdruckes nicht auf schwierige Abschätzungen, sondern auf den Nachweis gründet, daß er eine ganze Zahl vorstellt, welche modulo einer geeigneten Primzahl gewiß nicht zur Null kongruent ist.

Im Anschluß zu diesen arithmetischen Untersuchungen sei noch einer wichtigen Abhandlung „Über die Irreduziblität ganzer Funktionen mit ganzzahliger Koeffizienten“ gedacht. In dieser Abhandlung führt Hilbert den Nachweis des Satzes: Ist eine Funktion $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ in einem gewissen durch eine algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereich irreduzibel, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, in dieser Funktion für $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so daß dadurch die Funktion in eine Funktion allein der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ übergeht, welche im gegebenen Rationalitätsbereiche irreduzibel ist. Hieraus ergibt sich alsdann der Beweis des bis dahin nur vermuteten Satzes, daß es unbegrenzt viele Gleichungen $n$ten Grades geben müsse, deren Gruppe im Bereiche der rationalen Zahlen die symmetrische Gruppe ist. Das Gleiche gilt auch für die alternierende Gruppe.

Indem ich nun auf die geometrischen Untersuchungen Hilberts übergehe, habe ich über sein Werk „Grundlagen der Geometrie“ (1899,

2. Aufl. 1905) zu berichten. Diese Grundlagen sind eine kritische Untersuchung der Prinzipien der Geometrie, für die er ein einfaches und vollständiges System von Axiomen aufstellt und die wichtigsten Grundtheoreme (den Satz von Desargues und einen Spezialfall des Pascalschen Satzes) in der Weise ableitet, daß die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Schlüsse in Evidenz tritt. Er ordnet die Axiome in fünf Gruppen ein und beweist die Widerspruchslosigkeit derselben, indem er arithmetische Mannigfaltigkeiten konstruiert, die den Axiomen genügen. Schließlich werden die geometrischen Elementarkonstruktionen eingehend erörtert und auf Grund tiefliegender arithmetischer Sätze die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür entwickelt, daß sich eine vorgelegte Konstruktionsaufgabe allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken lösen lasse.

In diesem Zusammenhange sei noch seiner wichtigen Untersuchung über die Begründung der Geometrie vom Standpunkte der Transformationsgruppen aus gedacht, die durch die größere Allgemeinheit ihrer Voraussetzungen die hierauf bezüglichen Untersuchungen von Sophus Lie überholt.

Hilberts hier genannten Arbeiten, die hinsichtlich ihrer großen Bedeutung schon von Poincaré auf das eingehendste gewürdigt wurden, haben eine reiche Literatur hervorgerufen, gewissermaßen die von Hilbert wiederholt ausgesprochene Überzeugung bekräftigend, daß die logische Strenge der Untersuchungen stets die Keime fruchtbarer Weiterentwicklung in sich trägt.

Und nun noch einiges über Hilberts Forschungen auf dem Gebiete der Funktionentheorie. Ich möchte zuerst seines bewunderungswürdigen Beweises gedenken, den er für das Dirichletsche Prinzip geführt hat, welches die Existenz der Lösung des bekannten Randproblems der Potentialtheorie aus der als selbstverständlich angesehenen Existenz des Minimums eines Integrals folgert. Dieses Prinzip hatte sich vermöge seiner Einfachheit und mannigfachen Anwendbarkeit auf die Theorie der algebraischen Integrale, sowie auf Probleme der mathematischen Physik als eines der wirkungsvollsten Hilfsmittel der mathematischen Forschung erwiesen. Nun kam die Weierstrasssche Kritik, in der an einem sehr einfach gewählten Beispiele die Unzulässigkeit der Dirichletschen Schlußweise evident dargetan wurde. Dem Dirichletschen Prinzip war hierdurch scheinbar der Lebensnerv abgeschnitten. Nur mit dem Aufwand großer Mühe konnten C. Neumann, H. Schwarz und H. Poincaré Ersatz für das so leistungsfähige Dirichletsche Prinzip schaffen. Umso höher ist nun Hilberts Verdienst anzurechnen, das Dirichletsche Prinzip in seiner ursprünglichen Einfachheit mit den einfachsten Mitteln wiederbelebt zu haben. Die Hilbertsche ebenso lichtvolle als einwurfsfreie Schlußweise zeichnet sich nebst ihrer

Schlichtheit noch durch den Umstand aus, daß sie nur die Minimumseigenschaft benützend, von den speziellen Eigenschaften der Potentialfunktionen keinen Gebrauch macht, daher auch auf allgemeinere Probleme der mathematischen Physik angewendet werden kann.

Von großer Bedeutung sind ferner HILBERTS „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (von 1902 ab). Unter Integralgleichungen sind solche Gleichungen zu verstehen, in denen eine unbekannte Funktion explizit und überdies unter dem Zeichen eines bestimmten Integrals im Integrandus enthalten ist. HILBERT hatte sich bald überzeugt, daß der systematische Aufbau der Theorie dieser Gleichungen für die ganze Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale und für die der Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, für die Theorie der linearen Differentialgleichungen, für die Potentialtheorie und Variationsrechnung von größter Bedeutung ist.

Er untersucht den Zusammenhang der Eigenschaften von Lösungen solcher Integralgleichungen unter der wesentlichen Voraussetzung, daß die durch ihn als „Kern" bezeichnete Funktion in bezug auf ihre beiden Argumente symmetrisch ist. Hierbei gelangt er zu Entwicklungen einer willkürlichen Funktion nach sogenannten Eigenfunktionen, in denen die bekannten Entwicklungen nach trigonometrischen, BESSELschen, LAMÉschen, STURMschen und Kugelfunktionen als spezielle Fälle enthalten sind. Es gelingt ihm ferner, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von unendlich vielen Eigenfunktionen aufzustellen. Überaus charakteristisch für HILBERTS Art zu schaffen ist es, daß den Grundgedanken seiner Arbeit ein als heuristisches Hilfsmittel oft angewandtes Verfahren liefert, das er mit großem Scharfsinn zu einem beweisenden Prinzip umgestaltet.

Ich möchte auch noch seiner Untersuchungen auf dem Gebiete der Variationsrechnung gedenken, die für diese Disziplin von der größten Bedeutung zu sein scheinen. Einen Weg verfolgend, den WEIERSTRASS angebahnt hatte, zeigt er, daß dieser zu einer überraschenden Vereinfachung der Variationsrechnung führt, indem zum Nachweis der notwendigen und hinreichenden Kriterien des Eintretens eines Extremums die Berechnung der zweiten Variation und zum Teil sogar die mühsamen an die erste Variation anknüpfenden Schlüsse vermieden werden können.

Doch ich breche die Reihe dieser leider allzu flüchtigen Schilderung von HILBERTS Untersuchungen nun ab. Dieselben lassen in HILBERT einen Mathematiker von den seltensten Qualitäten erkennen, der Strenge mit Vielseitigkeit, logische Schärfe mit großer Erfindungskraft, ruhiges Erwägen mit flammender Begeisterung für seine Wissenschaft in sich vereint.

BÜCHERSCHAU.

A kisérleti chemia elemei. (Die Elemente der Experimentalchemie.) Von Karl v. Than. Zwei Bände, II. Band, 3. Buch. Budapest 1906.

Das erste und zweite Buch des I. Bandes dieses Werkes, welche die allgemeine und physikalische Chemie resp. die Beschreibung der Elemente enthielten, ist im Bande XIV 1898 dieser Berichte besprochen worden. Der Verfasser legte in der Sitzung am 19. Februar der ungarischen Akademie das jetzt erschienene Buch des II. Bandes, des gesamten Werkes drittes Buch, vor. Dieses Buch ist der Beschreibung der sogen. anorganischen Verbindungen gewidmet, welche Verfasser die „Stammverbindungen" nennt.

Nach einer kurzen Einleitung, in welcher Verfasser die Benennung der „Stammverbindungen" motiviert, leitet er einige Sätze der allgemeinen Chemie ab. Er tat dies an diesem Orte hauptsächlich aus dem Grunde, damit dieselben bei der speziellen Beschreibung der einzelnen Verbindungen nicht öfters wiederholt werden müssen, zum Teil aber deshalb, weil diese Sätze seit dem Erscheinen des I. Bandes größere Wichtigkeit erlangt haben. Derartige Sätze sind die Phasenregel von Gibbs, erläutert an dem Beispiel des heterogenen Gleichgewichtssystems der Aggregatzustände des Wassers. Diese Regel wendet dann der Verfasser auf die heterogenen Gleichgewichtszustände der Isomerien, der Lösungen auf die Kristallhydrate, ferner auf einige kompliziertere Fälle der heterogenen chemischen Gleichgewichte an. Am Ende der Einleitung wird kurz die Theorie der fraktionierten Destillation, und ausführlicher die Methode der elektrochemischen Bestimmung der freien Energie behandelt.

Hierauf folgt der Hauptgegenstand des Buches, nämlich das System der Beschreibung der Stammverbindungen. Das Wesen des in diesem Werke befolgten, neuen und vielfach originellen Systemes bespricht der Verfasser auf S. 36 seines Werkes in folgender Weise:

Nach der üblichen didaktischen Gewohnheit hat man in den elementaren Lehrbüchern der Chemie den Gegenstand, nach einer

kurzen allgemeinen Einleitung, mit der Beschreibung eines wichtigeren Elementes, etwa des Sauerstoffs oder des Wasserstoffs begonnen, und behandelte dann bei den folgenden Elementen die Verbindungen derselben mit den vorhergehenden Elementen. Man schaltete dann bei passender Gelegenheit, an konkreten Beispielen erläutert, einzelne wichtigere Sätze der allgemeinen Chemie ein. Unstreitig besitzt diese Methode viele Vorteile; ebenso unzweifelhaft ist aber auch, daß bei einer derartigen Behandlung der größte Teil jener Zuhörer, welche neben andern ausgedehnten wichtigen Gegenständen dem Studium der Chemie gewöhnlich nur zwei Semester widmen können, sich nur sehr lückenhafte Kenntnisse verschaffen können. Jene, die über mehr Zeit verfügen, können auf Kosten der Anstrengung des Gedächtnisses und der Teilnahme an den Übungen im Laboratorium auch nur nach längerer Zeit und fleißiger Arbeit eine systematische Übersicht über die Vielfältigkeit der Erfahrungstatsachen und Sätze der Chemie sich beschaffen. Meiner Meinung nach kann dieses Verfahren weder für ökonomisch noch hinreichend wissenschaftlich angesehen werden. Daher habe ich schon vor mehr als dreißig Jahren versucht, die Lehren der Chemie auf einer strengeren systematischen Grundlage zu entwickeln, welche ich auch in diesem Werke angenommen habe. Nach den Erfahrungen meiner langen Lehrtätigkeit glaube ich, daß dieses System sowohl den didaktischen Anforderungen wie auch den wissenschaftlichen Ansprüchen besser entspricht als die bisher befolgten.

Beim Lernen ist dieses System nur dann zu verwerten, wenn man die Lehren der allgemeinen und physikalischen Chemie in der Art, vorausschickt wie ich dies im I. Bande dieses Werkes versucht habe. Der Anfänger wird schon in diesem allgemeinen Teile bei der Ableitung und Begründung der Hauptsätze und Grundbegriffe der Chemie, auf experimentaler Grundlage, mit den hauptsächlichsten Methoden der Forschung und den hervorragendsten Eigenschaften der wichtigsten Körper vertraut gemacht. Dies ist eine unerläßliche Bedingung dessen, damit auf Grund des hier befolgten Systems sich der Schüler über das Gebiet der speziellen Chemie in verhältnismäßig bequemer Weise eine klare Übersicht verschaffen könne. Die Aufgabe des fraglichen Systems besteht eben darin, mit Benutzung der Analogie der Verbindungen die Übersicht über dieselben zu erleichtern.

Zur Würdigung der Vorteile dieses Systems ist zu beachten, daß der Verfasser sowohl die metallischen als auch die nichtmetallischen Elemente, in je zwei größere Klassen geordnet hat (I. Bd. S. 479—481 des ungarischen Werkes). Die Metalle sind in „*Echte Metalle*“ und in „*Platinoid-Metalle*“ eingeteilt, während die nichtmetallischen Elemente in die Klasse der „*Oxygenoide*“ und in jene der in engerem Sinne genommenen „*Metalloide*“ zerfallen. Diese vier Klassen können in der folgenden Weise charakterisiert werden.

Die echten Metalle haben zumeist eine *konstante Wertigkeit*, ihr chemischer *Charakter* ist entschieden *positiv*. Letztere Eigenschaft findet darin einen Ausdruck, daß die echten Metalle beinahe in allen ihren Verbindungen als *elementare Kationen* von hohem Potential auftreten.

Die Platinoid-Metalle sind von *veränderlicher Wertigkeit*, der chemische Charakter ist weniger entschieden *positiv*. In ihren kleinerwertigen Formen (Isomerien) bilden sie wie die echten Metalle *elementare Kationen* aber von *niedrigerem Potential*. Sie sind Bestandteile der *komplexen Kationen* der *Metallammoniakverbindungen* sowohl wie jener der *komplexen Anionen* der Halogensalze.*

Die Oxygenoide sind in der Form ihrer minimalen Wertigkeit, also die Haloide und die Amphide, entschieden *negativ*, und bilden *elementare Anionen* von hohem Potential. Sie sind Bestandteile nahezu aller komplexen Anionen (Säureresten). In ihren höherwertigen Formen haben sie den Charakter von Metalloiden im engern Sinne. In diesen letzteren Formen zählen wir dieselben zu den weiter unten zu erwähnenden Hemimetalloiden.

Die Metalloide im engern Sinne haben eine veränderliche Wertigkeit; sie sind weniger entschieden negativ als die Oxygenoide. Mit den Amphiden verbunden bilden sie die *komplexen Anione* aller Amphidsalze. Mit *Alkylen* verbunden können sie komplexe Kationen bilden. Die Glieder mit hohen Atomgewichten in der Form ihrer minimalen Wertigkeit (z. B. As''', Sb''', Bi''', Sn'' usw.) können diese auch als *elementare Kationen* von nicht sehr hohem Potential auftreten.

Welche Elemente in die betreffenden Klassen gehören, ist aus der Tabelle auf S. 361 zu ersehen. Die Charakterisierung dieser Klassen hat nur eine relative Bedeutung. Obwohl in der überwiegenden Anzahl der Glieder der einzelnen Klassen die angeführten Eigenschaften ganz entschieden ausgeprägt sind, so ist dies bei einzelnen Gliedern weniger der Fall, da bei diesen die verschiedenen isomeren Formen allmähliche Übergänge aus der einen Klasse in eine andere bilden.

Die Grundlage der Beschreibung und der Reihenfolge der Stammverbindungen in diesem Werke bildet die Ähnlichkeit der chemischen Konstitution der einzelnen Verbindungen. Die Einteilung in größere Abteilungen und Klassen bestimmt die Reihenfolge der großen Klassen der nichtmetallischen Elemente, also die der *Oxygenoide* und der *Metalloide* (s. Bd. I S. 479 oder auch die Tabelle S. 361 dieses Aufsatzes). Auf dieser Grundlage sind die gesamten Stammverbindungen

* Mit diesem Namen bezeichnet Verfasser jene komplexen Salze, welche elektrolytisch in ein elementares Kation und in ein Platinoidmetall enthaltendes Anion zerfallen. Halogensalz ist z. B. K_2PtCl_6, während KCl zum Unterschiede als Haloidsalz vom Verfasser bezeichnet wird.

in vier große Abteilungen abgesondert. Die erste Abteilung umfaßt die *einfachen Verbindungen der Metalle mit den Nichtmetallen;* die zweite Abteilung die *Verbindung der Nichtmetalle miteinander;* in die dritte Abteilung gehören die *Verbindungen der Metalle mit den metalloidhaltigen Säureresten;* in der vierten Abteilung sind endlich die *komplexen Verbindungen der Platinoidmetalle* zusammengefaßt. Alle diese Abteilungen sind in Klassen gesondert, deren Reihenfolge wieder durch die natürlichen Gruppen der nichtmetallischen Elemente festgestellt ist; so daß die einzelnen Klassen die Verbindungen der gleichartigen positiven Radikale, mit den unter sich ebenfalls gleichartigen negativen Radikalen in sich fassen. Diese Einteilung in Klassen ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung.

Übersicht des Systems der Stammverbindungen.

Erste Abteilung: Einfache Verbindungen der Metalle mit den Nichtmetallen.

I. Klasse: *Metallhaloide.*
II. Klasse: Metallamphide.
III. Klasse: Metallmetalloide.

Zweite Abteilung: Verbindungen der Nichtmetalle miteinander.

IV. Klasse: Metalloidhaloide,
V. Klasse: Metalloidamphide.
VI. Klasse: Amphidsäureradikalhaloide.
VII. Klasse: Metalloidmetalloide,

Dritte Abteilung: Verbindungen der Metalle mit metalloidhaltigen Säureresten.

VIII. Klasse: Oxysalze.
IX. Klasse: Thiosalze.
X. Klasse: Nitridsalze.

Vierte Abteilung: Komplexe Verbindungen der Platinoidmetalle.

XI. Klasse: Komplexe Halogensalze.
XII. Klasse: Komplexe Amminverbindungen.

Die einzelnen Klassen teilen sich in Gruppen, deren Reihenfolge die Wertigkeit und die Abstufung der Stärke des chemischen Charakters des negativen Bestandteiles, im ganzen also durch die Reihenfolge

der natürlichen Gruppen des periodischen Systems bestimmt wird. So sind z. B. die fünf Gruppen der I. Klasse in folgender Reihenfolge nacheinander beschrieben: *1. Gruppe:* Metallfluoride ***MFl.*** *2. Gruppe:* Metallchloride ***MCl.*** *3. Gruppe:* Metallbromide ***MBr.*** *4. Gruppe:* Metalljodide ***MJ.*** *5. Gruppe:* Metallcyanide ***M(CN).*** Wenn der positive Bestandteil mit demselben negativen Bestandteile verschieden zusammengesetzte Verbindungen bildet, so zerfallen diese Verbindungsformen in gesonderte Reihen. So besteht z. B. in der II. Klasse die 1. Gruppe, welche die Verbindungen der Metalle mit Sauerstoff enthält, aus fünf Reihen, nämlich: *Reihe 1α:* Metalloxyde M_2O. *Reihe 1β:* Metallhydroxyde MOH. *Reihe 1γ:* Gemischte Metalloxyde $MM'''O_2$. *Reihe 1δ:* Metallhyperoxyde M_2O_2. *Reihe 1ε:* Metallsuboxyde M_4O.

Innerhalb der Gruppen und Reihen wird die Reihenfolge der einzelnen Verbindungen durch die Wertigkeit der positiven Bestandteile entschieden, und zwar in der Weise, daß man mit dem Wasserstoffe anfangend, die einwertigen positiven Elemente in der Reihenfolge nach ihrer Ähnlichkeit und der Abstufung ihrer Charakterstärke nachfolgen. Den Verbindungen der einwertigen positiven Elemente reihen sich dann jene der zwei-, drei-, vierwertigen positiven Elemente mit einem und demselben negativen Bestandteile an. Zur Übersicht der Reihenfolge der Verbindungen fügen wir als Beispiel die Gruppe der Metallchloride an, welche in der folgenden Tabelle in vertikalen Abschnitten nacheinander aufgeschrieben sind.

Die Reihenfolge der Glieder der Gruppe der Metallchloride.

a		*b*			*c*	*d*
HCl	$LiCl$	$CaCl_2$	$BeCl_2$	$CrCl_2$	$AlCl_3$	$PtCl_4$
KCl	$NaCl$	$SrCl_2$	$MgCl_2$	$MnCl_2$	$TlCl_3$	$PdCl_4$
$RbCl$	$CuCl$	$BaCl_2$	$ZnCl_2$	$FeCl_2$	$CrCl_3$	
$CsCl$	$HgCl$	$PbCl_2$	$CdCl_2$	$CoCl_2$	$MnCl_3$	
$(H_4N)Cl$	$AgCl$	$RaCl_2$	$SnCl_2$	$NiCl_2$	$FeCl_3$	
$(H_4P)Cl$	$AuCl$			$CuCl_2$	$AuCl_3$	
$TlCl$				$HgCl_2$		
				$PtCl_2$		
				$PdCl_2$		

In dieser Weise gelangen innerhalb der einzelnen Abschnitte die ähnlichsten Verbindungen nebeneinander, und dies erleichtert sehr wesentlich die Übersicht der Stammverbindungen.

Um die Ähnlichkeit und Abweichung in der Konstitution der einzelnen Verbindungen bündig zu bezeichnen, ist es von Vorteil, passende Ausdrücke einzuführen. Wir wollen zu diesem Zwecke die gleich-

wertigen Radikale von ähnlichem Charakter, nach dem Beispiele der Karbonidradikale, *homologe Radikale* nennen, dagegen die ungleichwertigen aber mit ähnlichem Charakter als *isologe Radikale* bezeichnen. Nach diesem Übereinkommen sind z. B. K^I, Rb^I, Na^I, Ag^I unter sich, sowie O^{II}, S^{II}, Se^{II} miteinander homologe Radikale, dagegen sind K^I, Ca^{II} und Fe^{III}, sowie Cl^I, O^{II}, N^{III} isolog. Der chemische Charakter der Verbindungen und die Mannigfaltigkeit derselben wird erfahrungsgemäß hauptsächlich durch die negativen Elemente oder Atomgruppen beeinflußt. So z. B. ist das Verhalten des Zinkoyxdes (ZnO) im Vergleiche zu jenem des Magnesiumoxydes (MgO) oder des Cuprioxydes (CuO) viel ähnlicher als zu dem des Zinkchlorides ($ZnCl_2$) oder jenem des Zinksulfates ($ZnSO_4$), in denen die Konstitution und der Charakter der negativen Bestandteile wesentlich verschieden sind. Von dieser Idee ausgegangen haben wir in diesem Werke zum Prinzip der Einteilung der Verbindungen die negativen Bestandteile derselben zugrunde gelegt. Die zusammengesetzten Bestandteile betrachten wir dann als homologe, wenn dieselben bei gleicher Wertigkeit und ähnlichem Charakter auch eine korrespondierende Konstitution besitzen. Dies setzt voraus, daß die betreffenden zusammengesetzten Bestandteile aus einer gleichen Anzahl homologer oder zum Teil identischer Radikale zusammengesetzt sei, die miteinander in ähnlicher Gruppierung direkt verbunden sind. So sind z. B. die Radikale $P^VO\equiv$ und $P^VS\equiv$ oder die Säurereste Cl^VO_3- und J^VO_3- untereinander homolog; dagegen sind die Säurereste $O:N\cdot O-$ und $O_2\vdots N\cdot O-$ oder $S^{IV}O_3=$ und $S^{VI}O_4=$ nicht homolog. Aus dem Gesagten geht hervor, daß im allgemeinen jene Verbindungen einander am meisten ähnlich sind, welche die homologen positiven Radikale mit einem und denselben negativen Radikale bilden. Die Ähnlichkeit ist, obwohl etwas geringer, aber doch ganz entschieden bei den Verbindungen, die aus isologen positiven Radikalen mit demselben negativen Bestandteile bestehen. Der Grad der Ähnlichkeit ist im ganzen genommen geringer bei jenen Verbindungen, welche die positiven Radikale von gleichem Charakter mit nicht identischen aber homologen negativen Bestandteilen bilden. Endlich ist die Ähnlichkeit die geringste bei jenen Verbindungen, welche die positiven Radikale von gleichem Charakter mit nicht homologen negativen Bestandteilen bilden. Nennt man kurzweg die erste Art der Verbindungen *homologe*, die zweite *isologe*, die dritte *analoge* und die vierte Art *heterologe Verbindungen*, so kann man zur Bezeichnung der Abstufungen der Ähnlichkeit den Sinn dieser Ausdrücke folgendermaßen feststellen.

Homolog sind die Verbindungen der homologen positiven Radikale mit einem und demselben negativen Bestandteile. Homolog sind also z. B. KCl, $RbCl$, $NaCl$, $AgCl$, ferner K_2SO_4 und Na_2SO_4, dagegen sind $NaCl$ und JCl nicht homolog.

Isolog sind die Verbindungen der isologen positiven Radikale mit demselben negativen Bestandteil; also KCl, $CaCl_2$ und $FeCl_3$, sowie K_2SO_4 und $BaSO_4$, endlich PCl_3 und $SbCl_5$.

Analog sind die Verbindungen der positiven Radikale von ähnlichem Charakter, mit nicht identischen aber homologen negativen Bestandteilen. So z. B. KCl, $FeBr_3$ und ZnJ_2, ferner K_2SO_4, $NaClO_4$ und $PbSeO_4$. Die Analogie ist natürlich am größten bei den Verbindungen desselben positiven Radikals mit homologen negativen Bestandteilen, wie z. B. KCl, KBr und KJ_2.

Heterolog sind endlich die Verbindungen der positiven Radikale von ähnlichem Charakter, mit nicht homologen negativen Bestandteilen; z. B. KCl und ZnO oder $Ba(NO_3)_2$ und $FeSO_4$. Die heterologen resp. analogen Verbindungen, welche ein identisches positives (oder identisches negatives) Radikal enthalten, können durch eine einfache Substitution (auch durch Umsatz) ineinander umgewandelt werden. Solche Verbindungen sind z. B. KJ, KCl, K_2O, KNO_3, K_2SO_4 usw. In solchen genetischen Gruppen haben wir im I. Bande dieses Werkes, bei der Beschreibung der Elemente, die wichtigsten Verbindungen derselben mit Erwähnung der hervorragendsten Eigenschaften in tabellarischer Übersicht zusammengefaßt.

Nach dem Angeführten besteht in dem angenommenen Systeme je eine Gruppe respektive eine Reihe der Verbindungen aus mehreren Abschnitten der homologen Verbindungen, die untereinander isolog sind. So sind beispielsweise in der oben mitgeteilten Gruppierung der Metallhaloide, die in den Kolumnen *a*, *b*, *c*, *d* eingeschriebenen Glieder desselben Abschnittes miteinander homolog, während die Glieder der verschiedenen Abschnitte miteinander verglichen isolog sind. Wir brauchen kaum hervorzuheben, daß die Homologie die vollkommenste bei jenen Verbindungen ist, deren positive Bestandteile in dieselbe Haupt- oder Nebengruppe des periodischen Systems gehören.

Im vorliegenden Buche beschreiben wir die wichtigeren Arten der Stammverbindungen in solchen aus homologen Gliedern bestehenden isologen Abteilungen. Bei der eben charakterisierten Einteilung kommt es häufig vor, daß Verbindungen der Elemente mit verschiedener Valenz (d. h. der Isomerien desselben Elementes) an Orten beschrieben werden, die voneinander weiter entfernt sind. Wenn bloß die Valenz des Elementes eine verschiedene ist, der Charakter aber ähnlich geblieben ist, so fallen die einfacheren Verbindungen desselben in verschiedene Abschnitte einer und derselben Gruppe resp. Reihe. So kommen z. B. $FeCl_2$, $MnCl_2$ und $CoCl_2$ in demselben Abschnitte vor, während $FeCl_3$ mit $AlCl_3$ in einem andern Abschnitte enthalten sind. Dies ist auch vollkommen gerechtfertigt, wenn man die verschiedenen Formen der elementaren Bestandteile (die Isomerie derselben) scharf

unterscheidet (I S. 189 f.). Das Ferrochlorid ist mit Manganochlorid homolog, während das Ferrichlorid mit dem Aluminiumchlorid homolog ist. In der Tat ist das Verhalten der nebeneinander beschriebenen Verbindungen viel ähnlicher miteinander als jene des Ferrochlorids im Vergleiche zu jenem des Ferrichlorids. Wenn aber mit der Valenz des Elementes zugleich auch der Charakter desselben eine Umwandlung erlitten hat, so gelangen die entsprechenden Verbindungen des Elementes in ganz verschiedene Abteilungen, Klassen oder Gruppen des Systems. So z. B. werden die Mangano(Mn^{II})verbindungen im ersten Teile der Ferroreihe, die Manganate (Mn^{VI}) und Hypermanganate (Mn^{VII}) in der dritten Abteilung des Systems bei den Sulfaten resp. bei den Chloraten beschrieben, wo auch ihr natürlicher Ort ist. Der genetischen Beziehungen zuliebe erfolgt in solchen Fällen ein gegenseitiger Hinweis auf die betreffenden Verbindungen.

Mit dem geschilderten Verfahren werden die Vorzüge des periodischen Systems der Elemente der Wirklichkeit entsprechend zur Geltung gelangen, während man die aus dem Mangel des erwähnten Systems hervorgehenden Widersprüche vermeidet. Zur Übersicht des neuen Systems und insbesondere zur Übersicht der Reihenfolge der Stammverbindungen dient die folgende Tabelle. Diese Tabelle enthält die Elemente und deren isomere Formen, welche die Bestandteile jener Stammverbindungen bilden, welche in diesem Buche beschrieben sind.

In dieser Tabelle sind die ähnlichsten homologen Elemente in derselben horizontalen Reihe angeführt. Der leichteren Übersicht wegen sind die homologen Reihen der echten Metalle und Metalloide etwas nach links, jene der Platinoidmetalle und der Hemimetalloide nach rechts verschoben. Nach den oben angeführten Auseinandersetzungen bilden die Grundlage der Einteilung der Verbindungen in Klassen und Gruppen jene Nichtmetalle von minimaler Valenz, deren Glieder in der Tabelle durch fettgedruckte Buchstaben hervorgehoben sind. Zur Orientierung im Gebrauch dieser Tabelle sei folgendes bemerkt. Kombiniert man die nacheinander folgenden metallischen Elemente mit dem ersten der fettgedruckten Nichtmetalle, also mit dem Fluor (Fl), so erhält man die 1. Gruppe der I. Klasse der Verbindungen, nämlich die Gruppe der Metallfluoride. In dieser Gruppe folgen die einzelnen Metallfluoride nach derselben Reihenfolge wie die der Metalle im obern Teile der Tabelle. Ebenso erhält man die 2. Gruppe derselben Klasse, d. h. die der Metallchloride durch Kombination der einzelnen Metalle mit dem Chlor (Cl). Zur II. Klasse gelangt man, wenn man in derselben Weise die Metalle mit dem Sauerstoff ($\mathbf{O}^{II}$), dem Schwefel ($\mathbf{S}^{II}$) usw. kombiniert. Die andern Abteilungen, Klassen, Gruppen und Reihen können in ähnlicher Weise aus der folgenden Tabelle festgestellt werden.

Tabelle der elementaren Radikale und deren isomere Formen.

Metalle.

Echte Metalle.** / Platinoidmetalle.**

I. H^{I}

K^{I} Rb^{I} Cs^{I} $(H_4N)^{I}$* Fl^{I}

Li^{I} Na^{I}

Cu^{I} Hg^{I} Ag^{I} Au^{I}

II. Ca^{II} Sr^{II} Ba^{II} Pb^{II} Ra^{II}

Be^{II} Mg^{II} Zn^{II} Cd^{II} Sn^{II}

Cr^{II} Mn^{II} Fe^{II} Co^{II} Ni^{II} Cu^{II} Hg^{II}

Pt^{II} Pd^{II} Jr^{II} Rh^{II} Os^{II} Ru^{II}

III. Al^{III} Gu^{III} Jn^{III} Fl^{III} Sb^{III} Bi^{III}

Cr^{III} Mn^{III} Fe^{III} Co^{III} Au^{III} Rh^{III}

IV. Ce^{IV} Th^{IV} U^{IV} Sn^{IV}

Pt^{IV} Pd^{IV} Jr^{IV} Rh^{IV} Os^{IV} Ru^{IV}

Nichtmetalle.

Oxygenoide

I. $\mathbf{Fl}^{I}$ $\mathbf{Cl}^{I}$ $\mathbf{Br}^{I}$ $\mathbf{J}^{I}$ $(\mathbf{CN})^{I}$*

II. $\mathbf{O}^{II}$ $\mathbf{S}^{II}$ $\mathbf{Se}^{II}$ $\mathbf{Te}^{II}$

Metalloide.** / Hemimetalloide.**

III. . . . . Fl^{III} Cl^{III} Br^{III} J^{III} $(C_3N_3)^{III}$*

$\mathbf{N}^{III}$ $\mathbf{P}^{III}$ $\mathbf{As}^{III}$ $\mathbf{Sb}^{III}$ $\mathbf{Bi}^{III}$ $\mathbf{B}^{III}$

IV. . . . O^{IV} S^{IV} Se^{IV} Te^{IV}

$\mathbf{C}^{IV}$ $\mathbf{Si}^{IV}$ $\mathbf{Ti}^{IV}$ $\mathbf{Zr}^{IV}$ $\mathbf{Ge}^{IV}$ $\mathbf{Sn}^{IV}$

Pb^{IV} Mn^{IV} Mo^{IV}

V. . . . . Cl^{V} Br^{V} J^{V}

N^{V} P^{V} A^{V} Sb^{V} Bi^{V}

VI. . . . . S^{VI} Se^{VI} Te^{VI} Cr^{VI} Mn^{VI} Fe^{VI}

Mo^{VI} W^{VI} U^{VI}

VII. . . . . Cl^{VII} J^{VII} Cr^{VII} Mn^{VII}

VIII. . . . . Os^{VIII} Ru^{VIII}

---

* Das Ammonium, Cyan und Tricyan haben wir aus systematischem Gesichtspunkte, obwohl dieselben zusammengesetzte Radikale sind, den elementaren Radikalen eingeschaltet.

** Die auf der linken Seite befindlichen Benennungen beziehen sich auf die nach links verschobenen Gruppen, die rechtsseitigen Benennungen dagegen auf die nach rechts verschobenen Gruppen.

In den großen Klassen der Amphidsalze enthält eine jede der zahlreichen Gruppen mehrere Reihen solcher Salze, deren Säurereste unter sich homolog sind. Die Einteilung in Gruppen, sowie die Reihenfolge derselben ist in der Einleitung zur betreffenden Klasse, wenn erforderlich, näher auseinander gesetzt. Zur Erläuterung, wie dies z. B. bei der komplizierten Klasse der Oxysalze geschehen ist, füge ich hier die Einleitung zu dieser Klasse in deutscher Übersetzung bei.

VIII. Klasse: Oxysalze.

„Die Oxysalze sind jene Amphidsalze, in welchen das Metall mittels des Sauerstoffes mit dem Säurerest verbunden ist. Diese Säurereste enthalten nebst dem Sauerstoff in dem Säureradikal ein Metalloid. Die Valenz dieses Metalloids bestimmt die Anzahl der Sauerstoffatome in dem Säurereste, und damit die Zusammensetzung und meistens auch die Konstitution des Salzes. Die Grundlage zur Gruppierung der Oxysalze bildet daher die Valenz des im Säurereste enthaltenen Metalloids, sowie die Konstitution des Säurerestes. Die Reihenfolge innerhalb der Gruppen entscheidet die Stellung des Metalloids in der Tabelle der Elemente (S. 361). Alle jene Oxysalze, die ein Metalloid von gleicher Valenz und einen ähnlichen Charakter enthalten, außerdem eine gleiche Zusammensetzung und ähnliches Verhalten zeigen, sind in dieselbe Gruppe zusammengefaßt. Kurzweg werden diese Gruppen nach dem wichtigsten Repräsentanten der die Gruppen bildenden Reihen benannt.

Nach diesen Grundsätzen sind die gesamten Oxysalze in folgende 16 Gruppen zusammengefaßt:

1. Hypochloritgruppe . . . . . $MM_\delta^{I}O$.
2. Nitritgruppe . . . . . $MM_\delta^{III}O_2$.
3. Orthophosphitgruppe . . . . $M_3M_\delta^{III}O_3$.
4. Hyposulfitgruppe* . . . . . $M_2(M_\delta^{IV})_2O_4$.
5. Sulfitgruppe . . . . . $M_2M_\delta^{IV}O_3$.
6. Karbonatgruppe . . . . . $M_2M_\delta^{IV}O_3$.
7. Nitratgruppe . . . . . $MM_\delta^{V}O_3$.
8. Orthophosphatgruppe . . . . $M_3M_\delta^{V}O_4$.
9. Pyrophosphatgruppe . . . . . $M_4(M_\delta^{V})_2O_7$.

* Diese Gruppe sollte nach der neuern Nomenklatur Hydrosulfitgruppe genannt werden. Ich behielt den obigen Namen, um eine Verwechslung mit den sauren schwefligsauren Salzen ($MHSO_3$) zu verhüten, nachdem gegenwertig die unterschwefligsauren Salze allgemein nicht als Hyposulfite, sondern als Thiosulfate bezeichnet werden.

10. Sulfatgruppe . . . . . $M_2M_\delta^{VI}O_4$.
11. Pyrosulfatgruppe . . . . . $M_2(M_\delta^{VI})_2O_7$.
12. Polythionatgruppe . . . . . $M_2S_n^{II}S_2^{VI}O_6$.
13. Hypersulfatgruppe . . . . . $M_2(M_\delta^{VI})_2O_8$.
14. Hyperchloridgruppe . . . . . $MM_\delta^{VII}O_4$.
15. Hyperchromatgruppe . . . . $MM_\delta^{VII}O_5$.
16. Haloidamphidsalzgruppe . . . $MO_3M_\delta^{VI}R$.

Die meisten dieser Gruppen teilen sich in mehrere analoge Reihen von Oxysalzen.

So besteht z. B. die Nitratgruppe aus folgenden analogen Reihen:

Die Reihen der 7. oder der Nitratgruppe.

Reihe 7 α: Chlorate . . . . . $MClO_3$.
Reihe 7 β: Bromate . . . . . $MBrO_3$.
Reihe 7 γ: Jodate . . . . . MJO_3.
Reihe 7 δ: Nitrate . . . . . MNO_3.
Reihe 7 ε: Metaphosphate . . . . . MPO_3.
Reihe 7 η: Metaarsenate . . . . . $MAsO_3$.
Reihe 7 ϑ: Metaantimonate . . . . . $MSbO_3$.

Von diesen Reihen sind die vier ersten im Vergleich zueinander ähnlicher als im Vergleich zu den drei letzten Gruppen, die wieder unter sich mehr Ähnlichkeit aufweisen.

Innerhalb der Reihen werden die einzelnen Salze in derselben Reihenfolge beschrieben, welche, wie bei andern Verbindungen der Metalle, der Valenz und dem Charakter derselben der Reihe nach entsprechen (s. Tab. auf S. 361). Die Reihe beginnt immer mit dem Wasserstoffsalze d. h. der Hydrosäure. So z. B. ist:

Die Reihenfolge der Glieder der 7δ (d. h. der Nitrat)-Reihe.

HNO_3	$LiNO_3$	$Ca(NO_3)_2$	$Fe(NO_3)_2$	$Tl(NO_3)_3$	$Ce(NO_3)_4$
KNO_3	$NaNO_3$	$Sr(NO_3)_2$	$Co(NO_3)_2$	$Al(NO_3)_3$	$Th(NO_3)_4$
$RbNO_3$	$HgNO_3$	$Ba(NO_3)_2$	$Ni(NO_3)_2$	$Fe(NO_3)_3$	$Sn(NO_3)_4$
$CsNO_3$	$AgNO_3$	$Pb(NO_3)_2$	$Cu(NO_3)_2$	$Bi(NO_3)_3$	
$(H_4N)NO_3$		$Mg(NO_3)_2$	$Hg(NO_3)_2$		
$TlNO_3$		$Zn(NO_3)_2$	$Pd(NO_3)_2$		
		$Cd(NO_3)_2$	$(UO)(NO_3)_2$		
		$Sn(NO_3)_2$			

Diese Reihen bestehen also wieder aus isologen Abschnitten, deren Glieder unter sich homolog sind."

Wenn wir bei der Charakterisierung der einzelnen Klassen oder auch der Gruppen allgemeine Formeln anwenden, benutzen wir immer Zeichen von folgender Bedeutung:

M = einwertiges Metall.
M^v = $v$wertiges Platinoidmetall.
R = einwertiges Haloid.
R^{II} = zweiwertiges Amphid.
$M_\delta{}^v$ = $v$wertiges Metalloid.

Nach der obigen Auseinandersetzung ist ersichtlich, daß nach der befolgten Reihenfolge der Beschreibung in den isologen Abschnitten die ähnlichsten Verbindungen nebeneinander gelangen, deren physikalische und chemische Eigenschaften beim Fortschreiten in der Reihenfolge sich stufenweise und zwar meistens regelmäßig ändern. Diese regelmäßige Änderung der Eigenschaften wiederholt sich in den isologen Abschnitten der verschiedenen Verbindungsgattungen in ähnlicher Weise. In dieser Art erlangt man ohne Überbürdung des Gedächtnisses, in verhältnismäßig leichter Weise, eine Orientierung über die Ähnlichkeit und Verschiedenheit der einzelnen Verbindungsgattungen. Diese Orientierung wird auch noch dadurch erleichtert, daß die Gruppen der in dieselbe Klasse gehörenden Verbindungsformen analoge, daher einander auch ähnlich sind. Wenn der Studierende auf diese Weise mit dem chemischen Begriffe der Gruppen und Reihen, welche die zwölf Klassen bilden, vertraut geworden ist, so hat er sich auch die Kenntnisse der wesentlichsten Eigenschaften der wichtigsten Verbindungsformen angeeignet. Ich glaube, daß nach dem Gesagten eine weitere Begründung der Vorteile dieses Systems aus dem Gesichtspunkte des Lernens und der Orientierung überflüssig sein dürfte.

Bei der Beschreibung der einzelnen Verbindungen verfahren wir ähnlich wie bei der Beschreibung der Elemente geschehen ist. Wir beginnen *a*) mit der Schilderung der wichtigsten äußeren Merkmale, die der Beobachtung unmittelbar zugänglich sind; dann teilen wir die wichtigeren physikalischen und chemischen Konstanten der Verbindung mit, und zwar in tabellarischer Übersicht. Hierauf folgen das chemische Verhalten der Wärme, dem Lichte, sowie andern Körpern gegenüber; hiermit in Verbindung wird, sofern es erforderlich scheint, die Konstitution abgeleitet. An dieser Stelle werden die Modifikationen, Isomerien nnd die minder wichtigen komplexen Derivate der betreffenden Verbindung, bei den Salzen z. B. die basischen Salze, die Polyanhydrosalze, die Doppelsalze usw. erwähnt, wenn dieselben nicht in besonderen Artikeln beschrieben sein sollten. Endlich werden die wichtigsten Bildungsweisen und die zur Darstellung der Verbindung üblichen Verfahren angegeben. Bei einzelnen wichtigeren Körpern werden auch die wichtigsten analytischen Methoden der Bestimmung, sowie das

Vorkommen und die Geschichte der Verbindung angeführt, soweit dieselben nicht schon bei der Beschreibung der Elemente berücksichtigt worden sind. Um ein klares Bild der Beschreibung der einzelnen Verbindungen zu geben, sei hier die Beschreibung des Ammoniumchlorids auf S. 65 des ungarischen Textes in deutscher Übersetzung beigefügt.

Ammoniumchlorid, *Chlorammonium*, *Salmiak* $(H_4N)Cl = 53{,}52$.

Physikalische Eigenschaften. Farblose reguläre Oktaeder oder Würfel, welche aus der wässerigen Lösung rasch kristallisiert, gewöhnlich farrenkrautartig aneinander gereiht sind. In trockenem Zustande stellt dasselbe gewöhnlich einen kristallinischen Gries dar. Der sublimierte Salmiak kommt im Verkehr in runden konvex-konkaven Kuchen vor; ist schwer zu zerreiben, da die etwas elastischen Kristallfasern miteinander verwoben sind. Der Geschmack ist scharf und salzig, zugleich abkühlend. In Wasser leicht und in Alkohol kaum löslich. Mit der vierfachen Menge Schnee zerrieben, sinkt die Temperatur des Gemenges von 0^0 auf $-15{,}4^0$ C.

Die wichtigeren Konstanten des Ammoniumchlorids.

Spezifisches Gewicht . . . . . $d_{19^0} = 1{,}522$ [Schiff u. Monsacchi]
Dampfdichte (bei Rotglut) . . . . $D_l = 0{,}926$ [Pullinger u. Gardn.].
Kubischer Ausdehnungskoeffizient . $\gamma_{40^\circ} = 0{,}00\,018\,764$ [Fizeau].
Spezifische Wärme (23—100^0) . . $C = 0{,}3908$ [Neumann].
Verdampfungswärme (1 g) . . . . $V_w = 706$ *Kal.* [Marignac].
Bildungswärme (aus d. gasf. Elem.) $(H_4N)Cl = 758$ *Kal.* [Thomsen].
Neutralisationsw.$(H_3NAq + HClAq)$ $N_w = Aq\ 123$ *Kal.* [Thomsen].
Lösungswärme (mol.) . . . . . $L_w = -Aq\ 39$ *Kal.* [Thomsen].

Ein G.-T. Salmiak löst sich bei t^0 in s G.-T. Wasser [Alluard].

t^0	s	t^0	s	t^0	s
0	3,52	30	2,40	60	1,82
10	3,04	40	2,17	80	1,56
20	2,68	50	1,98	100	1,37

Ein G.-T. Salmiak
löst sich bei t^0 in s G.-T. Weingeist (45 G. %) [Grabfield].

t^0	s	t^0	s
8	7,93	38	4,24
27	5,15	56	3,32

Das spezifische Gewicht $d^{15^0/_{15^0}}$ einer Salmiaklösung von p % [Gerlach].

p %	d	p %	d	p %	d
1	1,0032	10	1,0303	20	1,0593
5	1,0158	16	1,0481	26	1,0758

Der Siedepunkt Sp einer Salmiaklösung von p % Gehalt [Gerlach].

p %	Sp	p %	Sp	p %	Sp
6,5	101°	34,6	106°	61,9	111°
12,8	102°	39,6	107°	67,8	112°
19,0	103°	45,0	108°	74,2	113°
24,7	104°	50,6	109°	81,3	114°
29,7	105°	56,2	110°	87,1	114,8°

Spezifische Wärme C einer Salmiaklösung von p % [Thomsen-Marignac].

p %	C	p %	C
1,4 % bei	18° 0,982	10,6 % zwischen	20—52° 0,885
2,9 „ „	18° 0,967	28,3 „ „	20—52° 0,760

Gr.-Äquivalent-Leitfähigkeit Λ, der wässerigen H_4N^{+1}, Cl^{-1}-Lösung bei 18° [Kohlrausch]. Verdünnung v in Litern.

v	Λ	v	Λ	v	Λ
1	97,0	50	119,6	1000	127,3
5	106,5	100	122,1	5000	128,8
10	110,7	500	126,2	10000	129,2

Chemische Eigenschaften. Der Salmiak verflüchtigt sich beim Erhitzen, ohne zu schmelzen, schon unterhalb der Rotglut; sein Dampf ist beinahe vollständig in Salzsäure- und Ammoniakgas dissoziiert. Seine Dampfdichte ($S_l = 0{,}926$) ist aus diesem Grunde die Hälfte der berechneten Dichte ($S_l = 1{,}853$). Diese Dissoziation ist durch das Verhalten des Dampfes bei der Diffusion (I S. 99), ferner auch dadurch experimentell bewiesen, daß Salzsäure- und Ammoniakgas vorher auf 350° erhitzt, beim Vermischen keinerlei Wirkung aufeinander ausüben.*

Nach den Beobachtungen von Baker hat die Dampfdichte des absolut trockenen Salmiaks einen normalen Wert. Die Dissoziation des gewöhnlichen Salmiaks ist daher auf die katalytische Wirkung der Feuchtigkeitspuren zurückzuführen. Die wässerige Lösung des Ammoniumchlorids hat eine neutrale Reaktion; kocht man aber die Lösung längere Zeit, insbesondere wenn man zugleich einen Luftstrom durch die Lösung hindurchleitet, so entweicht etwas Ammoniak, und die Lösung nimmt dann eine saure Reaktion an. Erhitzt man das

* C. v. Than, m. tud. Akademia közlönye V. Bd. S. 171, 1865. Deutsch Liebigs Annalen Bd. XXXI S. 129—147, 1864. Ferner siehe C. v. Than, Die neueren Fortschritte der theoretischen Chemie (ung.) S. 197, Budapest 1904.

Ammoniumchlorid mit metallischem Kalium, Zink oder Eisen, so verwandeln sich diese Metalle in Chloride, während sich Wasserstoff- und und Ammoniakgas entwickeln. Eine ähnliche Zersetzung tritt bei Gegenwart von Wasser und Luft schon bei gewöhnlicher Temperatur ein. Daher werden die genannten Metalle, sowie auch das Kupfer in Berührung mit Salmiak stark angegriffen. Alkalisch reagierende Verbindungen, namentlich die Metalloxyde und Metallhydroxyde zersetzen den Salmiak sehr leicht unter Entwicklung von Ammoniak. Nitrate, Sulfate und Karbonate werden beim Erhitzen mit überschüssigem Salmiak nach und nach in Chloride verwandelt. In einer verdünnten Lösung des Salmiaks in Berührung mit Luft vermehren sich die Schimmelpilze nach längerer Zeit in dem Maße, daß zufolge der Einwirkung derselben auch das gelöste Salz zerlegt wird.

Bildung und Darstellung. Das Ammoniumchlorid bildet sich beim Vermischen gleicher Volumina von Salzsäure- und Ammoniakgas unter bedeutender Wärmeentwicklung $HCl + H_3N = \mathbf{H_4NCl} + 419\ K.$ [Thomsen]; sowie auch dann, wenn man die wässerige Lösung dieser Gase miteinander mischt:

$$HClAq + H_3NAq = (H_4N)ClAq + 123\ K.$$

Man sieht aus dieser Angabe, daß die Neutralisationswärme derselben bedeutend kleiner ist als die der Chloride der Alkalimetalle.

Bei der Darstellung des Leuchtgases wird die Steinkohle, welche auch Stickstoff enthält, der trocknen Destillation unterworfen. Man erhält hierbei als Nebenprodukte Teer und ein solches wässeriges Destillat, welches neben viel Ammoniumkarbonat Teerprodukte, wenig Ammoniumsulfid, Ammoniumcyanid und auch Ammoniumcyanat enthält; dieses Destillat ist das sogenannte *Gaswasser*. Aus diesem stellt man den Salmiak gewöhnlich so dar, daß man das Gaswasser mit Kalkmilch destilliert, das sich hierbei entwickelnde Ammoniakgas in Salzsäure hineinleitet und die Lösung eindampft. Der so gewonnene rohe Salmiak wird zur Entfernung der darin enthaltenen Eisenverbindungen mit wenig saurem Calcium- oder Ammoniumphosphat, und zur Zurückhaltung der Teerbestandteile mit Kohle vermischt, in flachen gußeisernen oder tönernen Gefäßen erhitzt, wobei der Salmiak auf dem konkaven Deckel hinaufsublimiert.

Der sublimierte Salmiak enthält etwas Ferrochlorid als Verunreinigung; man befreit ihn davon nach dem ungarischen Arzneibuch in der Weise, daß man denselben, in der dreifachen Wassermenge gelöst, mit Ammoniak versetzt. In Berührung mit der Luft scheidet sich dann Ferrihydroxyd ab. Die filtrierte Lösung dampft man in einer Porsellanschale ab, und trocknet den Rückstand unter Umrühren ein. Das Arzneibuch fordert, daß der Salmiak von neutraler Reaktion sei, beim Erhitzen in einem Probierrohr soll er sich vollständig

verflüchtigen und ein völlig weißes Sublimat geben; eine gelbe oder graue Farbe deutet auf einen Teergehalt. Die verdünnte Lösung darf weder von Baryumchlorid (SO_4) noch mit Essigsäure angesäuert von Schwefelwasserstoff verändert werden (*Pb*, *Cu*, *As*). Auch muß es auf Zusatz von Ammoniumsulfid unverändert bleiben (*Fe*, *Zn*). Mit Jodjodkaliumlösung vermischt darf die Lösung auch nach 2—3 Stunden keinen Niederschlag geben (Pyridinbasen). Auf einen Arsengehalt prüft man die Lösung des Salmiaks in derselben Weise wie die Salzsäure. Der Salmiak dient als Arzneimittel, auch verwendet man ihn beim Verzinnen und Löten der Metalle, ferner als Beizmittel und zur Darstellung von Ammoniak und anderer Ammoniumsalze usw.

Vorkommen. Salmiak kommt in der Natur selten und in spärlicher Menge vor, namentlich in der Nähe der tätigen Vulkane; Spuren finden sich im Steinsalz, in manchen Steinkohlen und auch im Harne. Er bildet sich auch bei der trocknen Destillation stickstoffhaltiger Carbonide bei Gegenwart von Chloriden. Aus dieser Tatsache ist zu erklären, daß man aus dem Ruße, welcher beim Verbrennen des Kamelmistes sich ablagert, durch Sublimation Salmiak erhalten kann. In uralten Zeiten soll in Ägypten auf diese Weise Salmiak erzeugt worden sein."

Nach der Beschreibung der Gruppen resp. Reihen folgt eine kurz zusammenfassende Charakterisierung der wesentlichsten physikalischen und chemischen Eigenschaften der zu den Gruppen gehörigen Verbindungen. Hierbei werden die gegenseitigen Verwandlungen der verschiedenen Verbindungsgattungen, also ihre genetischen Beziehungen berücksichtigt. Nach dem Angeführten bilden den wichtigsten Stoff des Lernens eben die einleitenden Übersichten und die charakterisierende Zusammenfassung der einzelnen Verbindungsformen. Bei fleißigen Besuch der Vorlesungen und durch Verwendung dieser Zusammenfassungen kann auch der Anfänger die chemische Denkweise sich leicht aneignen. Das oben geschilderte System der Beschreibung und die konsequent durchgeführte Reihenfolge der Verbindungen ermöglicht das leichte Auffinden der betreffenden Verbindung. Dieser Umstand, sowie die zahlreichen übersichtlich dargestellten Angaben gestatten, daß das Buch neben der Bequemlichkeit des Lernens auch als Nachschlagebuch vorteilhaft benutzt werden kann.

Den Schluß dieses Buches bildet eine zusammenfassende Übersicht der Stammverbindungen, welche 20 Seiten umfaßt. In diesen sind die hervorragendsten Eigenschaften aller wichtigeren Verbindungsformen, welche in den zwölf Klassen der Gruppen und Reihen beschrieben worden sind, in möglichster Kürze zusammengefaßt. Diese Skizzierung ist z. B. für die IV. Klasse, welche die Metalloidhaloide enthält, in folgender Weise auf S. 1015 ausgeführt.

IV. Klasse: Metallhaloide.

„Hierher gehören die normalen Verbindungen der Metalloide mit den Haloiden. In diesen Verbindungen ist eine jede Valenz des Metalloides mit einem Haloidelemente verbunden. Die Zusammensetzung derselben, welche zugleich die Konstitution wiedergibt, ist $M_\delta^c Rv$. Dieselben haben die gemeinsamen Eigenschaften, daß sie schlechte Elektrolyte sind, und daß sie *durch Wasser*, mit wenigen Ausnahmen, *hydrolytisch* vollständig *in Haloidsäure* und *in eine Oxysäure zerfallen*. Mit dem Ammoniak, mit dem Wasser und mit den Haloidsalzen vereinigen sich dieselben häufig zu Molekelverbindungen. Sie entstehen aus ihren elementaren Bestandteilen meistens unter bedeutender Wärmeentwicklung. Die Stickstoffhaloide sind in hohem Maße endothermisch und bilden sich aus ihren Komponenten nur im Statu nascendi.

1. Gruppe: Metalloidfludide $M_\delta^v Flv$. Das PFl_3, PFl_5, BFl_3, CFl_4, $SiFl_4$ und SFl_6 sind gasförmig, die übrigen Verbindungen bilden meistens flüchtige rauchende Flüssigkeiten oder feste kristallinische Körper. Das BFl_3 und das $SiFl_4$ verbinden sich mit Metallhaloiden auch zu komplexen Halogensalzen.

2. Gruppe: Metalloidchloride $M_\delta^v Clv$. Das Cyanchlorid ist gasförmig, die andern sind größtenteils flüchtige rauchende Flüssigkeiten, manchmal kristallinisch. In trocknem Zustande sind sie meistens beständig. Die Pentachloride dissoziieren bei höherer Temperatur in Chlorgas und in Trichloride.

3. Gruppe: Metalloidbromide $M_\delta^v Brv$. Dieselben sind flüchtige rauchende Flüssigkeiten oder Kristalle. Ihr Verhalten ist jenem der Metalloidchloride entsprechend.

4. Gruppe: Metalloidjodide $M_\delta^v Jv$. Sie bilden meistens kristallinische gefärbte Verbindungen, die flüchtigeren rauchen an der feuchten Luft. Auf Einwirkung des Chlorgases scheiden sie Jod aus. Ihr Verhalten entspricht jenem der Metalloidchloride, sie sind aber leichter zersetzlich."

Dem Anfänger, der das Buch beim Studieren benutzt hat, dient diese Zusammenfassung zur wesentlichen Erleichterung der unvermeidlichen Gedächtnisarbeit. Die Zusammenfassungen enthalten dasjenige, was im Gedächtnis auch des Anfängers einzuprägen hauptsächlich wertvoll ist. Ich glaube, daß sich derselbe hiermit eine gebührende Übersicht der Stammesverbindungen verschafft.

Das Buch enthält eine große Anzahl Angaben, die demselben gewissermaßen den Charakter eines Handbuches verleihen. Dieser Umstand, sowie die im Interesse des Anfängers aufgenommenen Charakterisierungen und Zusammenfassungen nach den einzelnen Gruppen,

verursachten, daß das Buch etwas umfangreich (66 Bogen) geworden ist. Dies war aber bei unsern heimischen literarischen Verhältnissen beinahe unvermeidlich. Zur Erläuterung des Textes dienen 88 schematische und klare Holzschnitte. Die Ausstattung des Buches gereicht zur Ehre der Druckerei der FRANKLIN-Gesellschaft, sowohl was die Reinheit des Druckes als auch die Präzision des Satzes der zahlreichen oft komplizierten chemischen Symbole und Formeln betrifft.

Daß das angenommene System als erster Versuch noch manche der Verbesserung fähige Mängel aufweist, ist begreiflich. Ich glaube aber dasselbe hat eine gesunde Grundlage. Die Annahme der Isomerie der Elemente mit verschiedenen Valenzen, welche zum Aufbau des Systemes sehr wesentlich war, ist auch mit der Elektronentheorie in vollkommenem Einklange. Hiermit ist es möglich gewesen, die Vorteile des periodischen Systems mit Vermeidung der Widersprüche desselben vollauf zur Geltung zu bringen.

Da der Begriff der Isomerie der elementaren Bestandteile, auf welchem das neue System ruht, kein geläufiger ist, gestatten Sie mir, daß ich bei dieser Gelegenheit die Berechtigung dieses Begriffes, wenn auch nur kurz gefaßt, motivieren könne.

Daß dieser Begriff sich bisher nicht allgemein Eingang verschaffen konnte, dem stand, meiner Überzeugung nach, hauptsächlich das Dogma der absoluten Unveränderlichkeit der chemischen Atome entgegen. Dieses Dogma ist aus folgenden Erfahrungstatsachen hervorgegangen. Die einfachen elementaren Körper können aus ihren verschiedenen Verbindungen mit ihren ursprünglichen Eigenschaften dargestellt werden. So kann z. B. aus dem Merkurochlorid ($HgCl$) und ebenso aus dem Merkurichlorid ($HgCl_2$) dasselbe metallische Quecksilber dargestellt werden. Ferner hat sich die Masse des Atoms, bei Anwendung unserer verhältnismäßig wenig empfindlichen Wagen, bei allen chemischen Prozessen wenigstens scheinbar als völlig konstant erwiesen. Aus diesen beiden Tatsachen ist das oben erwähnte Dogma hervorgegangen und ist ohne eine tiefere kritische Überlegung allgemein angenommen worden. Zu diesem Behufe wäre es aber notwendig gewesen, zu beweisen, daß das chemische Atom wirklich einfach und nicht aus weiter zerlegbaren Teilen zusammengesetzt ist. Nur in diesem Falle hätte man annehmen dürfen, daß innerhalb des Atoms bei konstanter Masse auch keine weiteren Änderungen möglich sind. Dieser Beweis ist aber niemals erbracht worden, daher ist die absolute Unveränderlichkeit des Atoms einfach als ein unbewiesenes Dogma zu betrachten, dem die neuesten Untersuchungen zu widersprechen scheinen.

In einem der ungarischen Akademie der Wissenschaften im Jahre

1892 vorgelegten Aufsatze* „Über das Gesetz der Valenz" habe ich auf Grund rein objektiver Betrachtungen zu beweisen versucht, daß die Tatsachen uns zu einer entgegengesetzten Auffassung zwingen. Das Ergebnis dieser Betrachtungen führte nämlich zu der Annahme, daß die elementaren Bestandteile der Verbindungen in verschiedenen Zuständen auftreten können, woraus unbedingt gefolgert werden muß, daß innerhalb des chemischen Atoms wesentliche Veränderungen auch in dem Falle stattfinden können, wenn die Masse desselben scheinbar konstant bleibt.

Bei Vermeidung jedweder Hypothese war mein Gedankengang etwa der folgende:

Die elementaren Bestandteile einer Verbindung darf man mit den im freien Zustande dargestellten einfachen Körpern gleichen Namens schon aus dem Grunde nicht identifizieren, weil der Energieinhalt in den beiden Zuständen gewöhnlich in hohem Grade verschieden ist. Es wäre beispielsweise widersinnig, zu behaupten, daß das Knallgas und das Wasser deshalb identisch wären, weil beide dieselben Bestandteile in demselben Gewichtsverhältnisse enthalten. Der große Unterschied der beiden Körper besteht hauptsächlich darin, daß 18 g Wasser eine 68400 Kal. entsprechende Energiemenge weniger enthalten als eine gleiche Menge des Knallgases. Dieser kolossale Unterschied des Energieinhaltes verursacht eben die große Verschiedenheit der physikalischen und chemischen Eigenschaften der beiden Körper.

Da die Bestandteile als solche in isoliertem Zustande uns völlig unbekannt sind, so können wir uns über ihre Eigenschaften nur indirekt aus dem Verhalten ihrer selbständig existierenden Verbindungen Kenntnis verschaffen. Aus diesem Umstande wirft sich die Frage auf, wie man sich in exakter Weise über die Identität der gleichnamigen Bestandteile zweier Verbindungen überzeugen könne? Wie es Ihnen bekannt sein dürfte, haben diese Betrachtungen zu dem Ergebnisse geführt, daß man in zwei verschiedenen Verbindungen einen identischen Bestandteil nur in dem Falle anzunehmen berechtigt ist, wenn:

beide Verbindungen bei einem einfachen Umsatze mit demselben dritten Körper eine den betreffenden Bestandteil enthaltende Verbindung liefern, deren Eigenschaften alle identisch sind.

Gestatten Sie mir, daß ich den Inhalt dieses Satzes an einigen konkreten Beispielen in möglichster Kürze erläutere.

Aus den beifolgenden einfachen Umsätzen

$$Fe^{III}Cl_3 + 3\,KOH = 3\,KCl + Fe^{III}(OH)_3$$

und

$$Fe_2^{III}(SO_4)_3 + 6\,KOH = 3\,K_2SO_3 + 2\,Fe^{III}(OH)_3$$

* *Mathematisch-naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* Bd. XI, S. 374—388. Derselbe Gegenstand ist mit Versuchen erläutert in meinem Lehrbuche „Kisérleti chemia" I, S. 183—196 ausführlich dargelegt.

folgern wir, daß in dem Ferrichlorid $[Fe Cl_3]$ und in dem Ferrisulfat $[Fe_2(SO)_3]$, das Ferriradikal $[Fe^{III}]$ als identischer Bestandteil enthalten ist, da die physikalischen und chemischen Eigenschaften der aus denselben durch Kaliumhydroxyd entstandenen Ferrihydroxyde identisch sind.

Aus den beiden einfachen Umsätzen

$$Fe^{III}Cl_3 + 3\,KOH = 3\,HCl + Fe^{III}(OH)_3$$

und

$$Fe^{II}Cl_2 + 2\,HOH = 2\,HCl + Fe^{II}(OH)_2$$

folgt dagegen, daß Ferrichlorid $[Fe^{III}Cl_3]$ und das Ferrochlorid $[Fe^{II}Cl_2]$ zwei wesentlich verschiedene Bestandteile, nämlich das Ferriradikal $[Fe^{III}]$ und das Ferroradikal $[Fe^{II}]$ enthalten, da die physikalischen und chemischen Eigenschaften der beiden Produkte völlig verschieden sind. Obwohl aus diesen Bestandteilen dasselbe metallische Eisen darstellbar ist, dürfen dieselben dennoch nicht identifiziert werden. Man darf dieselben nur als isomere Bestandteile ansehen, da die beiden Radikale mit Beibehaltung ihrer Wertigkeiten und spezifischen Qualitäten durch eine ganze Reihe von Verbindungen jedes für sich überführbar sind. Wären die beiden Radikale ineinander nicht so leicht zu verwandeln, wie dies in der Tat der Fall ist, so müßte man das Ferriradikal und das Ferroradikal trotz der Gleichheit ihrer Atomgewichte als zwei wesentlich verschiedene elementare Bestandteile ansehen. Man müßte sie mit derselben Berechtigung für verschiedene Elemente halten, wie z. B. Kobalt und Nickel oder Eisen und Mangan, deren Atomgewichte ebenfalls nur wenig voneinander abweichen.

Das Dogma von der absoluten Unveränderlichkeit des Atoms hat das abweichende Verhalten des Ferri- und Ferrochlorides dadurch zu erklären versucht, daß das Eisen in der einen Verbindung mit drei Atomen Chlor, in der andern dagegen nur mit zwei Atomen verbunden ist. Hiernach wäre das vesschiedene Verhalten der Verbindungen nicht auf die Verschiedenheit des Eisenatoms, sondern auf die verschiedene Anzahl der mit demselben verbundenen Chloratome zurückzuführen. — Mit dieser Auffassung wäre die Tatsache nicht so leicht zu erklären, daß in vielen Verbindungen die beiden Formen des Eisens zugleich vorkommen und diese beiden Formen in einer und derselben Reaktion mit Beibehaltung ihrer charakteristischen Qualität sich verschieden verhalten. Eine solche Verbindung ist z. B. das Ferroferrioxyd oder Magnetit. Löst man dasselbe in Salzsäure auf, so verwandelt sich $^1/_3$ des Eisens in Ferrochlorid, während $^2/_3$ desselben in Ferrichlorid übergeht.

$$Fe^{II}\begin{matrix}\diagup O \cdot Fe^{III} : O \\ \diagdown O \cdot Fe^{III} : O\end{matrix} + 8\,HCl = 4\,H_2O + Fe^{II}Cl_2 + 2\,Fe^{III}Cl_3.$$

Aus dieser Reaktion muß man schließen, daß in dem Magnetit sowohl das Ferroradikal wie das Ferriradikal zu gleicher Zeit nebeneinander existieren. Da das Verhalten derselben bei dieser und ähnlichen Reaktionen gänzlich verschieden ist, darf man diese beiden Formen nicht als identische, sondern nur als isomere betrachten.

Daß das Ferroradikal und das Ferriradikal nicht identisch sein können, geht auch aus dem elektrolytischen Verhalten ihrer Verbindungen entschieden hervor. In den wässerigen Lösungen der Ferrosalze müssen wir das zweiwertige Ferroion (Fe^{+2}), in jenen der Ferrisalze dagegen das dreiwertige Ferriion (Fe^{+3}) annehmen. Nur bei diesen Annahmen sind wir imstande die elektrolytische Dissoziation, den osmotischen Druck, die Gefrierpunktserniedrigung und die Siedepunktserhöhung ihrer Lösungen zu erklären. — In wässerigen Lösungen der betreffenden Salze ist das Ferroion bezw. das Ferriion mit andern Bestandteilen nicht direkt verbunden, sondern sie bilden nach der neuern Theorie der Lösungen selbständig existierende Molekule. Nach dieser Auffassung ist die Ansicht, ihr verschiedenes Verhalten damit zu erklären, daß sie mit verschiedenen Mengen der andern Bestandteile verbunden wären, vollständig unhaltbar. Das verschiedene Verhalten dieser beiden Ionen beweisen am entschiedensten die Faradayschen Gesetze der Elektrolyse. Mit einem Mol also mit 56 g Ferroion werden bei der Elektrolyse 2×96540 Coulomb Elektrizitätsmenge in Bewegung gesetzt, während bei der Elektrolyse der Ferrisalze dieselbe Eisenmenge 3×96540 Coulomb mit sich führt. Dies bedeutet mit andern Worten, daß die elektrische Ladung des selbständig wandernden Ferriions um $^1/_3$ größer als jene des Ferroions ist. Schon aus diesem wichtigen Grunde darf man logischer Weise die beiden Bestandteile miteinander nicht identifizieren.

Wir wollen nun sehen, wie es sich mit dem Energieinhalt der beiden fraglichen Bestandteile verhält. Dies geht aus der Ionisierungswärme des Ferro- und Ferriions hervor, worüber die folgenden thermo-chemischen Gleichungen Rechenschaft geben.

$$\mathbf{Fe} = Aq\,Fe^{+2} + 20200\ cal. \qquad (1)$$

$$Aq\,Fe^{+2} = Aq\,Fe^{+3} - 18100\ cal. \qquad (2)$$

Aus der Summierung beider Gleichungen folgt

$$\mathbf{Fe} = Aq\,Fe^{+3} + 2100\ cal. \qquad (3)$$

Hieraus ergibt sich, daß bei der Verwandlung von 56 g des elektrisch-neutralen metallischen Eisens in Ferroion exothermisch 20200 cal. abgegeben werden (Gl. 1). Während bei der Umwandlung des Ferroions in Ferriion endothermisch 18100 cal. aufgenommen werden (Gl. 2). Aus dieser Tatsache erklärt sich die relativ starke oxydierende Eigen-

schaft der Ferriverbindungen im Gegensatz zu den stark reduzierenden Eigenschaften der Ferrosalze.

Vergleicht man die Gleichung 3 mit der Gleichung 1, so ergibt sich, daß von ein und demselben Anfangszustand, nämlich jenem des elektrisch-neutralen metallischen Eisens ausgegangen, bei der Bildung des Ferroions beinahe die zehnfache Menge der Energie (20200 cal.) ausgeschieden wird als bei der Bildung des Ferriions (2100 cal.). Wenn man im Angesicht dieser Tatsachen das Ferroion mit dem Ferriion im Sinne des obenerwähnten Dogmas identifizieren wollte, so würde man denselben groben Irrtum begehen, den man begeht, wenn man das Knallgas mit dem Wasser identifiziert. Dies aber würde einfach die Ignorierung wohlbegründeter Tatsachen bedeuten, welches mit den Grundprinzipien der naturwissenschaftlichen Denkart in direktem Widerspruch wäre.

Die neue Elektronentheorie nimmt an, daß bei der Bildung des Ferroions aus neutralen Eisenatomen letzteres exothermisch zwei negative Elektronen verliert, wodurch zwei positive Ladungen des Eisenatoms frei werden. Bei der Umwandlung des Ferroions in Ferriion verliert das Eisenatom noch ein negatives Elektron, wodurch seine positive Ladung sich um eine Einheit vermehrt. Da dies in endothermischer Weise vor sich geht, ist das Potential des Ferriions bedeutend geringer als jenes des Ferroions. Wenn man mit Nernst die positiven Elektronen mit ⊕ bezeichnet, so ist die symbolische Konstitution der beiden Ionen

⊕ *Fe* ⊕	und	⊕ ⊕ *Fe* ⊕
Ferroion.		*Ferriion.*

Die Elektronentheorie hat aus gewissen Tatsachen die Hypothese abgeleitet, daß die bisher für einfach angesehenen chemischen Atome sehr kompliziert zusammengesetzte Gebilde seien. Diese Hypothese betrachtet die chemischen Atome als das System einer sehr großen Anzahl von positiv geladenen Elektronen, um welche eine kolossale Anzahl negativer Elektronen mit enormer Geschwindigkeit herumkreisen. Nach dieser Hypothese können im Innern dieser komplizierten Systeme durch äußere Einflüsse Veränderungen und daher verschiedene Gleichgewichtszustände hervorgebracht werden, welche etwa den verschiedenen Isomerien der elementaren Bestandteile entsprechen würden.

Das an dem konkreten Beispiele der Eisenverbindungen Angeführte gilt auch für andere elementare Bestandteile, die mit verschiedener Valenz und abweichendem Charakter in den Verbindungen auftreten können. Man darf daher bei objektiver Überlegung die aus demselben einfachen Körper entstandenen elementaren Bestandteile, die eine ver-

schiedene Wertigkeit und auch einen verschiedenen Charakter besitzen, nicht identifizieren. Man muß sogar derartige elementare Bestandteile mit demselben Rechte für isomer ansehen, wie irgend welche zusammengesetzte Radikale, die miteinander isomer sind. Solche sind z. B. das einwertige Allyl $CH_2 : CH : CH_2$ und das dreiwertige Glyceryl $\begin{matrix}CH_2\\|\\CH\\|\\CH_2\end{matrix}$. Kein vernünftig denkender Chemiker wird diese beiden Radikale, weil sie gleich zusammengesetzt sind, für identische Bestandteile halten. Die hier kurz angeführten Tatsachen, sowie die Folgerungen der Ionentheorie und der Elektronentheorie können nur dann ungezwungen erklärt werden, wenn man die elementaren Bestandteile von verschiedener Wertigkeit, obwohl dieselben schlechtweg häufig denselben Namen führen, nicht als identische, sondern als isomere betrachtet.

Die Annahme der Isomerie solcher elementarer Bestandteile, welche die Grundlage meines Systems bildet, ist nicht nur berechtigt, sondern auch notwendig. Will man nicht in unlösbare Widersprüche geraten, so kann eine rationelle Erläuterung der Ähnlichkeit der verschiedenen Stammverbindungen meiner Ansicht nach nur auf Grund der Annahme der Isomerie der elementaren Bestandteile durchgeführt werden.

Budapest, am 27. März 1906. **C. v. Than.**

B. G. Teubners Mathematische Zeitschriften.

Bibliotheca Mathematica.

Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften.

Herausgegeben von **Gustaf Eneström.** III. Folge. 7. Band. 1906. gr. 8.
Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.—

Mathematische Annalen.

Begründet 1868 durch A. Clebsch u. C. Neumann. Unter Mitwirkung von P. Gordan, A. Mayer, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll, H. Weber hrsg. v. **F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert, O. Blumenthal.**

62. Band. 1906. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.—

Generalregister zu den Bänden 1—50, zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit Porträt von A. Clebsch. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 7.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

In Monatsheften herausgegeben von **A. Gutzmer.** 15. Band. 1906. gr. 8.
Preis für den Band von 12 Heften n. ℳ 18.—

Generalregister zu Band 1—10, zusammengestellt von E. Wölffing. [In Vorbereitung.]

Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Organ für angewandte Mathematik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Unter Mitwirkung von C. von Bach, R. Helmert, F. Klein, C. von Linde, H. A. Lorentz, H. Müller-Breslau, H. Seeliger, H. Weber herausgegeben von **R. Mehmke u. C. Runge.** 53. Band. 1906. gr. 8.
Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.—

Generalregister zu den Jahrgängen 1—25. [123 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.60.

Generalregister zu den Jahrgängen 1—50, zusammengestellt von E. Wölffing. [VIII u. 308 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 15.—, in Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Archiv der Mathematik und Physik.

Im Anhang: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. III. Reihe. Hrsg. von **E. Lampe, W. Franz Meyer** und **E. Jahnke.** 10. Band. 1906. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 14.—

Generalregister zu Reihe II, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. Mit Bildnis von R. Hoppe. [XXXI u. 114 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Ein Organ f. Methodik, Bildungsgehalt u. Organisation der exakten Unterrichtsfächer an den höheren Schulen, Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen. Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann. Hrsg. von **H. Schotten.**

37. Jahrgang. 1906. gr. 8.
Preis für den Jahrgang von 8 Heften n. ℳ 12.—

Generalregisterzu den Jahrgängen 1—32 in Vorbereitung.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften
mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Herausgegeben im Auftrage der
Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien,
sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen.

In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. Geheftet.

Bisher erschienen:

I. **Arithmetik und Algebra,** 2 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] geh. *M.* 17.—, in Halbfranz geb. *M.* 20.—
II. Teil. [X u. S. 555—1197] geh. *M.* 19.—, in Halbfranz geb. *M.* 22.—

II. **Analysis,** 2 Teile, red. von **H. Burkhardt.**
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M.* 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. *M.* 7.50; 4. [160 S.] 1900. *M.* 4.80; 5. [199 S.] 1904. *M.* 6.—; 6. [57 S.] 1906. *M.* 1.60.
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. *M.* 5.20.

III. **Geometrie,** 3 Teile, red. von **W. Frz. Meyer.**
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80; 2. [96 S.] 1904. *M.* 2.80.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M.* 5.40; 2/3. [256 S.] 1903. *M.* 6.80.

IV. **Mechanik,** 2 Teile, red. von **F. Klein u. C. H. Müller.**
I. Teil. 1. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. *M.* 3.40; 2. [156 S.] 1902. *M.* 4.60; 3. [156 S.] 1903. *M.* 4.60.
— 2. Abt. Heft: 1. [152 S.] 1904. *M.* 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. *M.* 3.80; 2. [131 S.] 1903. *M.* 3.80. 3. [192 S.] 1906. *M.* 5.80.

V. **Physik,** 2 Teile, red. von **A. Sommerfeld.**
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M.* 4.80;
— 2. [159 S.] 1905. *M.* 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. *M.* 8.—

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik,** red. von **Ph. Furtwängler und E. Wiechert.**
Heft: 1. [116 S.] 1906. *M.* 3.40.
VI. 2: **Astronomie,** red. von **K. Schwarzschild.**
Heft: 1. [193 S.] 1905. *M.* 5.80.

In Vorbereitung:

VII. **Historische, philosophische u. didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister.**

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG — GAUTHIER-VILLARS in PARIS.

Encyclopédie des sciences mathématiques
pures et appliquées.

Publiée sous les auspices des Académies des sciences
de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne
avec la collaboration de nombreux savants.

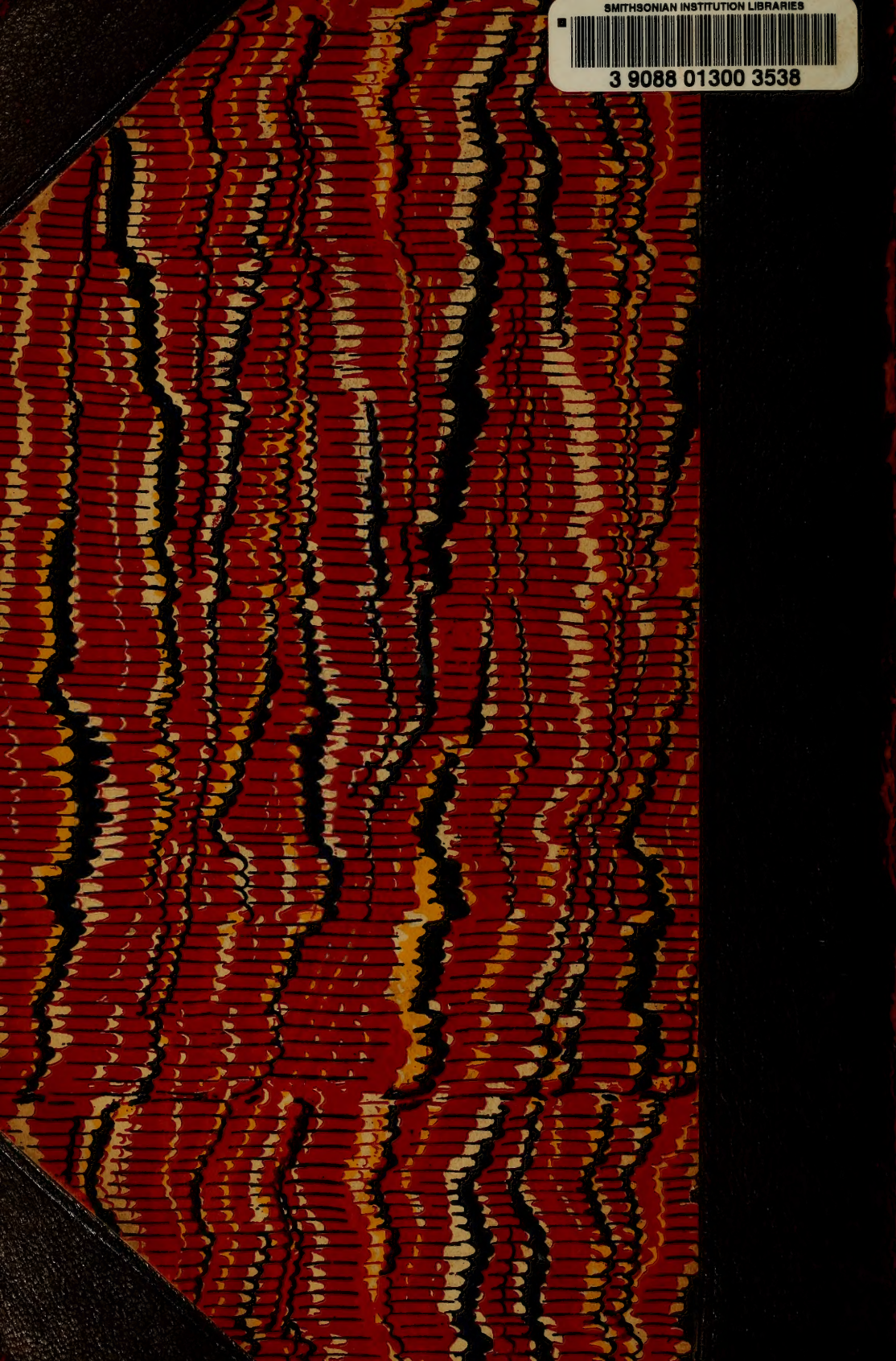
Edition française,

rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de
Jules Molk, professeur à l'université de Nancy.

En sept tomes. gr. 8.

Paru: Tome I: **vol. I, fasc. I.** [160 pag.] 1904. *M.* 4.— Tome I: **vol. III, fasc. I.** [96 pag.] 1906. *M.* 2.40. Tome I: **vol. IV, fasc. I.** [160 pag.] 1906. *M.* 4.—

Durch die günstige Aufnahme veranlaßt, welche die deutsche Ausgabe dieses monumentalen Werkes in Fachkreisen gefunden hat, und auf vielfache Anregungen hat sich die Verlagsbuchhandlung entschlossen, die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften in Gemeinschaft mit der Firma Gauthier-Villars in Paris auch in französischer Sprache erscheinen zu lassen. Das Werk wird, wie schon die erste Lieferung zeigt, seitens der deutschen Bearbeiter viele Änderungen und Zusätze erfahren, und auch die französischen Mitarbeiter, sämtlich Autoritäten auf ihren Gebieten, haben eine gründliche Umarbeitung vorgenommen. Zum ersten Male dürfte somit wohl hier der Fall eingetreten sein, daß sich bei einem so großen Werke die ersten deutschen und französischen Fachgelehrten zu gemeinsamer Arbeit verbunden haben.


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01300 3538